

# 量子测控基础

内部人员使用，不要外传

撰写人：杨申波

时间：2026 年 8 月 12 日

版本：Fundamentals of Quantum Measurement and Control\_V1.1

修订情况：20260812：初稿完成；20260813：系统化整理、补全细节、优化可读性。20260820：增加背景部分，优化，补充第二章 2.1-2.5 小节表达。

## 量子测控基础

### 一、引言和背景

#### 1.1 前言

#### 1.2 文章目的

#### 1.3 结构安排

#### 1.4 背景

##### 1.4.1 经典计算机

##### 1.4.2 量子领域

##### 1.4.3 量子计算

###### 1.4.3.1 量子计算的四个阶段

###### 1.4.3.2 量子计算优越性竞赛

###### 1.4.3.3 量子计算物理平台

### 二、超导量子原理

#### 2.1 从经典电路到超导量子比特

##### 2.1.1 从 LC 电路到量子谐振子

##### 2.1.2 约瑟夫森结

##### 2.1.3 transmon

##### 2.1.4 电路如何表示量子

###### 2.1.4.1 哈密顿量是什么？

###### 2.1.4.2 为什么宏观 LC 电路能拥有量子哈密顿量？

###### 2.1.4.3 Transmon 的能级来源？

#### 2.2 量子比特的优化

#### 2.3 量子比特相互作用

#### 2.4 噪声与退相干

##### 2.4.1 噪声的类型

##### 2.4.2 噪声和退相干建模

##### 2.4.3 $1/f$ 噪声

##### 2.4.4 常见的噪声例子

#### 2.5 量子比特控制

##### 2.5.1 经典计算机中的布尔逻辑门

##### 2.5.2 量子计算机中的量子逻辑门

##### 2.5.3 经典门与量子门比较

##### 2.5.4 单量子比特门操控

###### 2.5.4.1 微波控制

###### 2.5.4.2 旋转的实现

##### 2.5.5 虚拟 Z 门

##### 2.5.6 DRAG

##### 2.5.7 双比特门的实现

###### 2.5.7.1 iSWAP 门

###### 2.5.7.2 CPHASE 门

- 2.5.7.3 CR 门
      - 2.5.7.4 CZ 门
    - 2.5.8 可调耦合的门
    - 2.5.9 双比特门公式推导
  - 2.6 量子比特读出
    - 2.6.1 色散读出
    - 2.6.2 谐振器的幅度和相位的测量
      - 2.6.2.1 I-Q 混频
      - 2.6.2.2 外差解调
      - 2.6.2.3 两种解调方式比较
    - 2.6.3 弱测量 vs 强测量
  - 2.7 Purcell 滤波器
    - 2.7.1 Purcell 效应
    - 2.7.2 Purcell 滤波器效果
    - 2.7.3 Purcell 滤波器的常见设计
  - 2.8 参数放大器
    - 2.8.1 约瑟夫森参数放大器 (JPA)
    - 2.8.2 行波参数放大器 (TWPA)
    - 2.8.3 放大器的级联设计
  - 2.9 量子纠错
  - 2.10 量子计算优越性
  - 2.11 量子指标
- ### 三、超导量子测控系统
- 3.1 ezQ 系统整体认识
  - 3.2 调控 XY 芯片
  - 3.3 调控 Z 芯片
  - 3.4 读出系统
    - 3.4.1 读出芯片
- ### 四、超导量子计算机
- 4.1 超导量子计算机的认识
  - 4.2 超导量子计算机的标定
    - 4.2.1 超导量子计算机的标定流程
    - 4.2.2 准备阶段
      - 4.2.2.1 读取腔频
      - 4.2.2.2 色散位移
      - 4.2.2.3 精扫读取峰值
      - 4.2.2.4 比特 Z 控制线
      - 4.2.2.5 耦合器 Z 控制线
    - 4.2.3 初步标定
      - 4.2.3.1 二维 Rabi
      - 4.2.3.2 一维 f01
      - 4.2.3.3 Rabi01
      - 4.2.3.4 读取保真度
      - 4.2.3.5 Correct f01 by phase
      - 4.2.3.6 JPA
    - 4.2.4 关断耦合器
      - 4.2.4.1 交叉驱动
      - 4.2.4.2 二维 f01
      - 4.2.4.3 QQSwap
      - 4.2.4.4 T1 和 T2\*
    - 4.2.5 单比特门标定
      - 4.2.5.1 串扰标定 (重排频率)
      - 4.2.5.2 fah 与 Rabi12

- 4.2.5.3 精细校准门幅度
    - 4.2.5.4 DRAG
    - 4.2.5.5 单比特门 XEB
    - 4.2.5.6 关联读取
  - 4.2.6 两比特门标定
    - 4.2.6.1 XYZ timing
    - 4.2.6.2 直流门
    - 4.2.6.3 交流门
  - 4.2.7 性能标定
    - 4.2.7.1 退相干性能的标定
    - 4.2.7.2 耦合性能的标定
- 五、疑问记录
- 5.1 量子门与量子比特
    - 5.1.1 CR 门是什么？和 CZ 门的区别？
    - 5.1.2 交流两比特门是什么？
    - 5.1.3 CZ 门是交流双比特还是直流双比特门？
    - 5.1.4 CZ 门和 CNOT 门的区别与联系？
    - 5.1.5 超导量子的表征实验有哪些，保真度怎么测？
    - 5.1.6 JPA 和 HEMT 的区别？
    - 5.1.7 实际在量子芯片上的门操作是怎么样的？
    - 5.1.8 退相干时间怎么测量？ $T_2$ 、 $T_1$ 、 $T_\varphi$  之间的区别？
    - 5.1.9 旋转坐标系下，XY 微波频率和量子本身频率的微妙联系？
    - 5.1.10 双比特门纠缠到底是个什么东西？
    - 5.1.11 双比特有 4 个态，岂不是有 4 个能级？
    - 5.1.12 量子计算究竟是怎么实现的？
    - 5.1.13 纠错码是怎么纠错的？为什么有 d3、d5、d7 这几种？容错量子计算是怎么实现的？
    - 5.1.14 人类的观察改变了量子本身的行为，那么这边的观察究竟是怎么样的观察？
    - 5.1.15 几层几层的量子线路是什么？"几层" 是什么意思？
    - 5.1.16 Shor 算法是什么？
  - 5.2 芯片指标
    - 5.2.1 dBm 是什么？NSD 是什么？为什么是负的？
    - 5.2.2 带宽究竟是什么？为什么单位是频率？和数据率有什么关系？
    - 5.2.3 数据率和采样率和分辨率的区别和联系？
    - 5.2.4 功率稳定性是什么？其中单位 ppm 是什么？
    - 5.2.5 相位噪声是什么？为什么是 -dBc/Hz？
    - 5.2.6 dB 到底是  $\times 10$  还是  $\times 20$ ？换算公式？
    - 5.2.7 SFDR 是什么？
    - 5.2.8 通道内初始相位差是什么？
    - 5.2.9 DAC 的位数为啥有小数？还有什么有效位是怎么算的？
    - 5.2.10  $1/f$  噪声是怎么衡量？为什么用  $T_{\varphi 2}$  衡量？

---

# 一、引言和背景

---

## 1.1 前言

起笔于盛夏，致过往与未来

当 B348 窗外的草木达到一年中最茂盛的顶点，当实验楼反射着绿树在烈日下投出最浓重的墨绿之际，我知道，那个适合沉淀与反思的季节再次如约而至。2026 年的 8 月 1 日，这不仅是一个暑假的起始.....在接下来的十四天里，我选择将这一年来散落在文件夹中的笔记碎片，进行一场前所未有的淬炼与整合。本书的定位，是帮助我系统地梳理知识，形成一个开放的结构，邀请 2026 年 8 月之后的自己，以及 B348 实验室的老师学生，不断地往里填充新的数据、新的理解和新的思想。

## 1.2 文章目的

近年来，超导量子比特从基础研究转向规模化量子系统工程，形成了一个交叉学科——"量子工程"，不同领域的人参与其中。我希望写一本体系化的教材，帮助实验室的新学生完善对超导量子领域的认识。

**这本教材叫做《超导量子测控基础》，是我将平时的学习笔记进行整理，把我所学汇总成一本系统、有条理的书，方便以后查找相关知识，也方便我完善对应体系的知识。我希望将自己今后的学习与心得写下来，不全依赖 AI 生成，而是以自己书写为主。**

## 1.3 结构安排

文章暂时按照四个板块划分：**超导量子原理、超导量子测控系统、超导量子计算机、疑问记录。**

- **超导量子原理**（第二章）：从经典电路出发，建立量子比特、噪声退相干、量子门、读出与放大、量子纠错等的完整物理图景；
- **超导量子测控系统**（第三章）：介绍我们实验室的 ezQ 测控系统，包括调控芯片（XY/Z）与读出系统；
- **超导量子计算机**（第四章）：讲解超导量子计算机的整体认识与标定流程；
- **疑问记录**（第五章）：记录学习中反复思考过的问题，作为答疑与加深理解的部分。

## 1.4 背景

### 1.4.1 经典计算机

1936 年，英国数学家图灵提出图灵机的概念模型，奠定了计算机科学理论基础。1946 年，世界第一台通用电子计算机在美国诞生。

1965 年戈登·摩尔提出摩尔定律。流行说法是：集成电路上可容纳的晶体管，每隔 18 个月就会翻一番，性能提升一倍。现在情况是，芯片还是在按照这个规律发展，但是因为逼近物理极限了，靠着通过 3D 堆叠，新材料等等方式实现的，已经和最初描述的不大相同。

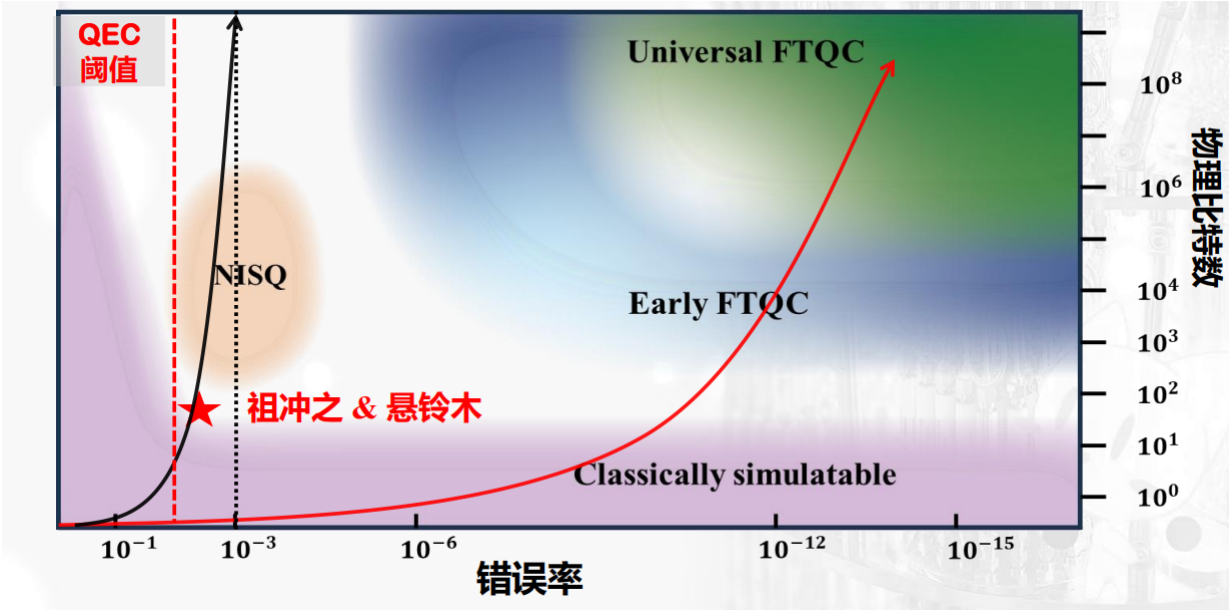
### 1.4.2 量子领域

1900 年，普朗克第一次提出能量量子化的概念，标志量子力学的诞生。1905 年，爱因斯坦用光量子解释光电效应。1913 年，波尔提出原子轨道模型。1925 年，海森堡提出量子力学的矩阵形式。1926 年，薛定谔提出量子力学的波动力学形式。1982 年，费曼提出可以通过构建一个专用的量子系统来模拟物理行为，从而比经典计算机更高效地解决一些特定的问题。

### 1.4.3 量子计算

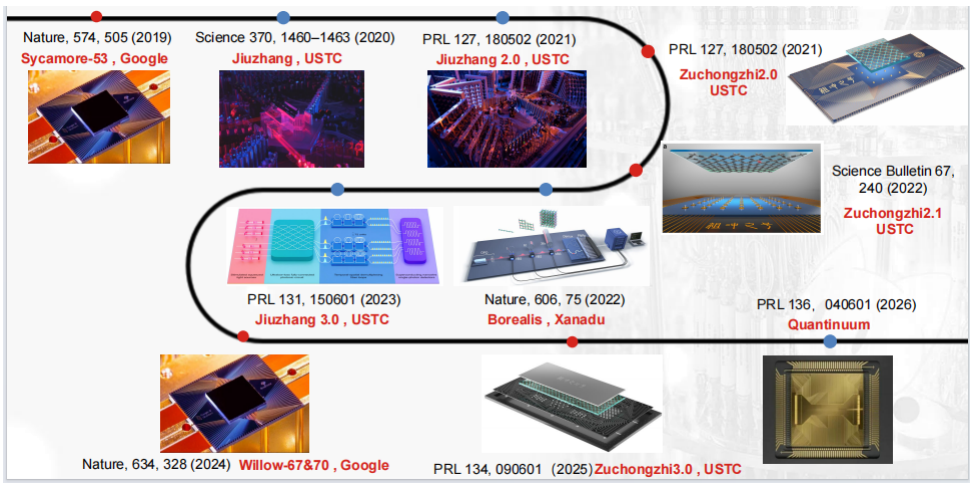
1985 年，大卫·多伊奇（牛津大学物理学家）提出量子图灵机数学模型，还涉及了第一个量子算法 Deutsch 算法。1994 年 Shor 提出 Shor 算法，对 RSA 密码体系造成冲击。1997 年，Grover 提出 Grover 算法，可以降低搜索复杂度。

1.4.3.1 量子计算的四个阶段



| 发展阶段                       | 核心特征                                                                       | 关键节点与说明                                                                                                                                                     |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 第一阶段：<br>理论奠基与<br>算法发现     | 纯理论阶段，没有物理硬件。<br>量子计算的强大潜力通过理论<br>算法被揭示。                                   | 标志事件包括费曼 1981 年提出量子模拟构想，以及肖尔<br>(1994 年) 和格罗弗 (1996 年) 提出能显著加速的量子算<br>法。此时的计算完全由经典计算机在“模拟”阶段。                                                               |
| 第二阶段：<br>经典可模拟             | 早期的物理实验，量子比特数<br>极少 (约 2-10 个)，运行简<br>单的量子算法。                              | 1998 年，首个 2-qubit 量子算法 (Deutsch 问题) 被实验<br>验证。由于规模极小，这些实验的每一步都可以用经典计算<br>机精确模拟。                                                                             |
| 第三阶段：<br>“NISQ”时代          | 量子比特数达到中等规模 (数<br>十到数百个)，但 <b>噪声大、无<br/>纠错</b> 。                           | 2016 年 IBM 开放 5 量子比特云平台，2018 年“NISQ”概念<br>被正式提出。谷歌 2019 年的“量子优越性”实验是此阶段的<br>标志性事件。此阶段的设备，其某些输出结果已 <b>无法被经典<br/>计算机有效验证</b> (即难以模拟)，但仍无法解决通用问题，<br>可靠性是主要瓶颈。 |
| 第四阶段：<br>容错量子计<br>算 (FTQC) | 量子比特数大幅增加 (理论上<br>可达百万级)，通过 <b>量子纠错<br/>(QEC)</b> 有效控制噪声，实现<br>通用、可靠的量子计算。 | 这是目前技术路线的终极目标。目前已有向此阶段过渡的迹<br>象，例如哈佛大学团队在 2023 年底实现了 48 个逻辑量子<br>比特的演示，证明了纠错技术的可行性。                                                                         |

1.4.3.2 量子计算优越性竞赛



**破局起步（2019–2020）：** 2019 年 Google 推出 **Sycamore-53** 超导芯片，率先宣称实现量子优越性；2020 年中国科学技术大学（USTC）推出光量子计算机 **九章（Jiuzhang）**，通过高斯玻色取样实现了光量子体系的里程碑突破。

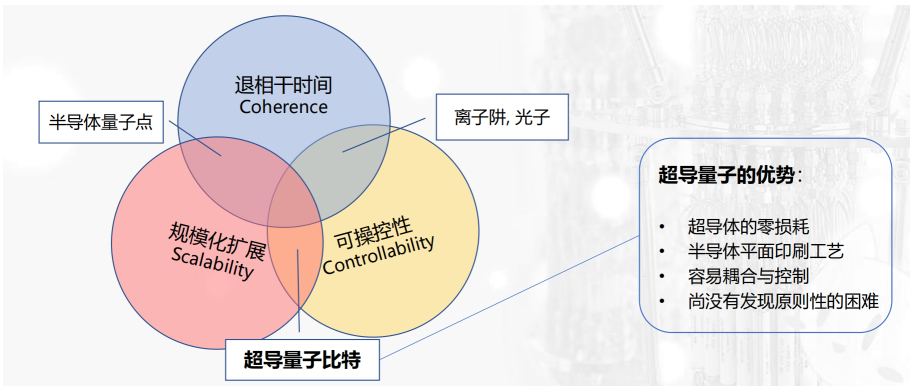
**多路线竞逐与迭代（2021–2023）：** 中科大在双路线上加速发力，相继推出 **九章 2.0/3.0** 光量子系统以及 **祖冲之 2.0/2.1** 超导量子处理器；加拿大 Xanadu 公司也在 2022 年凭借 **Borealis** 在光量子领域崭露头角。

**规模与精度跃升（2024–2026）：** 随着 Google 推出新一代超导芯片 **Willow (67&70)**，中科大升级至 **祖冲之 3.0**，以及离子阱领域代表 Quantinuum 的重要突破，量子计算已从最初的“单一算力验证”逐步迈向更高保真度、更大规模与容错量子计算的关键探索阶段。

1.4.3.3 量子计算物理平台

科学家是怎么实现量子比特的？

现阶段实现量子比特的方法有很多，例如 **硅中电子自旋与量子点**、**囚禁离子**、**超冷原子**、**金刚石中的氮-空位中心** 以及 **偏振光子** 等。这些方案都将量子信息编码于天然的微观量子系统之中。相比之下，**超导量子比特** 具有显著优势——其尺寸为宏观尺度，且可通过 **光刻工艺** 精确制备，因而在 **可扩展性** 和 **集成化** 方面展现出巨大潜力。



所以，评价一个量子体系，可以从时间空间操控 3 个维度来考量，超导量子比特的空间和可操控性展现了优势。

在物理层面上，构建量子比特的物理系统需要满足 DiVincenzo 准则：

- 1.能造出来且能扩容（明确的比特与可扩展性）。** 系统必须有清晰、稳定的两个能级来代表  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ ；而且不能只造出 1~2 个玩玩，必须有物理途径扩展到成百上千个比特。
- 2.能一键归零（初始化能力）。** 在每次计算开始前，必须能把所有量子比特快速、准确地重置到已知的初始状态（通常是全  $|0\rangle$ ）。

- 3.耐得住干扰（长相干时间）。量子态极其脆弱，容易被环境噪声破坏（退相干）。系统的相干寿命必须远长于单次操作所需的时间，确保算法还没运行完，状态没有先崩溃。
- 4.能完成所有运算（通用量子门集合）。系统需要支持任意的单量子比特旋转以及双量子比特纠缠操作（如 CNOT 门）。只要具备这套“基本动作库”，就能组合出任意复杂的量子算法。
- 5.能看清结果（特异性测量能力）。计算完成后，系统必须能高效、无误地读出每一个特定量子比特的状态（是 0 还是 1），而不能破坏其他无关比特或读出一团乱码。

| 物理平台                               | 核心实现方式                                                           | 核心优势                                        | 主要瓶颈                                   | 当前前沿水平                                                                  |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 超导量子比特<br><i>(Superconducting)</i> | 利用微米级超导电路中的 约瑟夫森结 构成非线性振荡器，将人工二能级系统编码为 人造原子（如 Transmon）。         | 门操控极快（纳秒级）、制造工艺兼容现有半导体微纳加工。                 | 相干时间相对较短（微秒级）、串扰严重、极低温（~10 mK）制冷机体积受限。 | 达到上千物理比特规模（IBM Condor/Heron、Google Willow/Sycamore）；已实现多轮量子纠错与逻辑比特纠缠突破。 |
| 离子阱 <i>(Trapped Ion)</i>           | 用电磁场（保罗阱）在超高真空中悬浮带电离子，以离子的 基态/超精细能级 编码比特，用激光或微波驱动库仑晶格操控。         | 比特同质性完美、门保真度极高（两比特门 > 99.9%）、全连接连通性好。       | 门速度较慢（微秒级）、激光与电极寻址系统复杂、单阱离子容量上限明显。     | 物理比特在数十至百位级（Quantinuum H2、IonQ Forte），保真度领先，已实现高保真容错逻辑比特演示。             |
| 中性原子 / 光镊 <i>(Neutral Atom)</i>    | 用光学微镊阵列捕获中性原子（如铷、铯），通过激光激发至 里德堡态 (Rydberg state) 利用偶极阻塞效应实现双比特门。 | 极易通过光镊实现 2D/3D 大规模阵列扩展、天然全同、比特可动态重构。        | 门操控速度中等、原子损失率与真空寿命限制连续运行能力。            | 物理比特扩展至数百到上千（QuEra、Harvard 团队），在可重构阵列中成功演示数十个纠错逻辑比特。                    |
| 光子量子 <i>(Photonic)</i>             | 利用光子的 偏振、路径、到达时间或正交压缩态 编码量子信息，通过分束器、相移器及单光子探测器实现计算。              | 室温运行（除超导探测器外）、相干时间极长（光速传输）、天然契合量子通信与网络。     | 确定性双比特门极难（需依靠测量诱导非线性）、单光子源及波导损耗大。      | 专用机（如“九章”、“祖冲之”光子版、Xanadu Borealis）确立“量子优越性”；PsiQuantum 等正攻坚光子纠错芯片。     |
| 半导体量子点 <i>(Spin Qubit)</i>         | 在硅（Si/SiGe）或砷化镓（GaAs）异质结中用静电栅极捕获单个电子/空穴，以其 自旋状态 作为比特。            | 体积极小（纳米级）、高度兼容现有 CMOS 工业制程、工作温度容忍度稍高（~1 K）。 | 对材料界面杂质与电荷噪声极敏感、控制线引出极度密集、良率要求严苛。      | 实验室已实现 6~12 个高保真度自旋比特阵列，处于从实验室物理向先进制程代工（如 Intel、台积电合作）过渡期。              |
| 其他（拓扑量子比特等）                        | 利用半导体-超导体混合纳米线两端的 马约拉纳零能模 (Majorana zero modes) 进行编织操作。          | 理论上具备硬件级拓扑保护，天然抗退相干，无需庞大纠错开销。               | 物理实现极度困难，存在长期争议。                       | 微软（Microsoft/Station Q）处于验证拓扑间隙与基础编织操作阶段，尚未产出通用可编程拓扑比特。                 |

## 二、超导量子原理

这一部分重点参考 *A quantum engineer's guide to superconducting qubits* 这篇文献。核心思路很明确：**要从零理解超导量子比特，就先从最基础的经典 LC 谐振电路入手，一步步改造成现在常用的 transmon 量子比特。**

### 2.1 从经典电路到超导量子比特

要做量子比特，首先得有一个能稳定存储量子态的电路。本节从 "经典 LC 电路 → 量子谐振子（QHO）→ 加约瑟夫森结 → transmon" 这条主线，逐步讲一讲超导量子比特是怎么来的。

## 2.1.1 从 LC 电路到量子谐振子

怎么把量子比特电路化？用经典 LC 电路模拟。

### 1. 经典 LC 振荡与量子化 (QHO)

经典并联 LC 电路中，能量在电容的电场（电荷  $Q$ ）与电感的磁场（磁通  $\Phi$ ）之间周期性转换。当电路在极低温下满足无耗散条件并进行量子化后，它便成为 **量子谐振子 (QHO)**。

- **分立能级：**量子化后能量不再连续，而是形成分立能级  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \dots$
- **能级等间距：**相邻能级差完全相同，即  $\Delta E = \hbar\omega_r$ （其中  $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ ）。

### 2. 瓶颈：能级等间距导致的能级泄漏

虽然 QHO 具有量子特性，但\*\*无法直接用作量子比特：

- 量子计算需要将操作精准隔离在基态  $|0\rangle$  和第一激发态  $|1\rangle$  构成的双能级子空间内。
- 由于所有相邻能级差相等 ( $\hbar\omega_{01} = \hbar\omega_{12} = \dots$ )，当施加频率为  $\omega_{01}$  的微波脉冲试图驱动  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  跃迁时，会不可避免地同时诱发  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  及更高阶激发（发生能级泄漏），无法实现对双能级系统的独立精准操控。

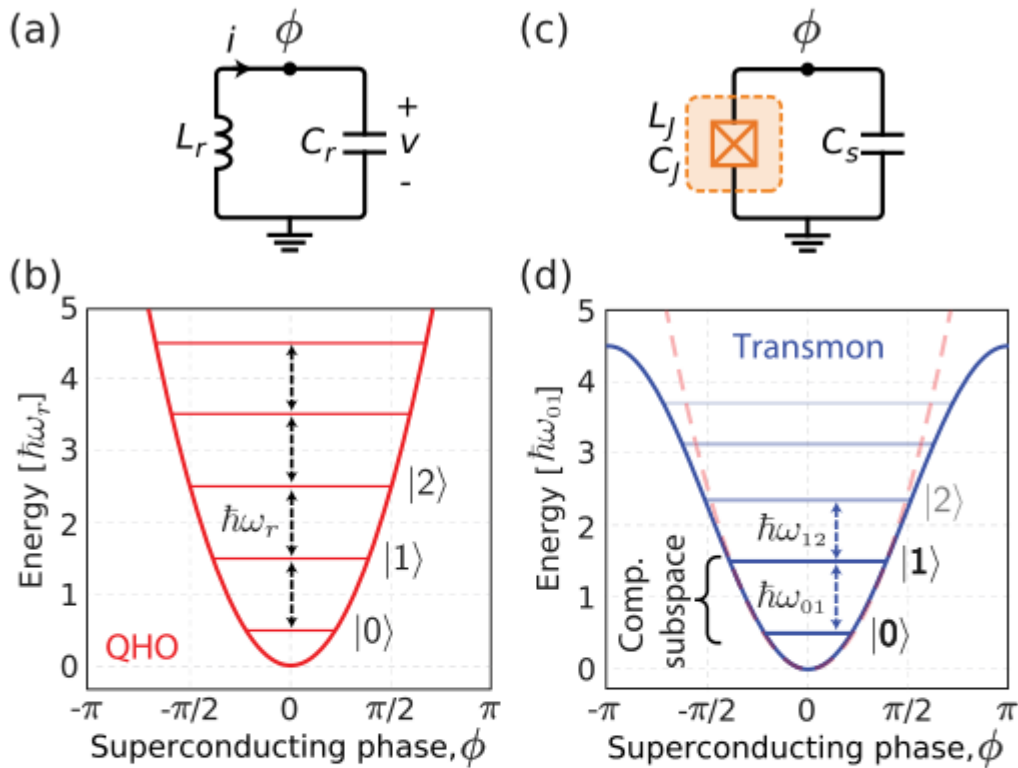
### 3. 解决：引入非线性元件约瑟夫森结

为了打破能级的等间距特性，需将线性电感  $L$  替换为 **非线性、无耗散的约瑟夫森结 ( $L_J$ )**，构建如 **Transmon** 这样的超导量子比特：

- **势阱变形：**约瑟夫森结将原先的抛物线二次势能改造成余弦（Cosine）非谐振势能。
- **非谐性 (Anharmonicity)：**能级间距被“拉开”，产生频率差异 ( $\hbar\omega_{01} \neq \hbar\omega_{12}$ )。此时即可用特定频率  $\omega_{01}$  准确且单独操控  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  计算空间。

## 2.1.2 约瑟夫森结

为将电路能级严格限制在  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的二能级子空间内，必须引入非线性元件——**约瑟夫森结 (Josephson Junction)**。该器件采用超导体-绝缘体-超导体 (SIS) 三明治结构。当用它替代 LC 电路中的线性电感时（入图 1c），系统的势能面由简谐抛物线变为余弦势，从而打破了等间距能级分布，产生显著的 **非简谐性 (Anharmonicity)**（图 1d）。这使得  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  与  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  的跃迁频率彼此区分，避免了高能态的泄漏。至此，宏观电路便具备了类似天然原子的分立能级结构，构成了可独立寻址调控的人造原子——超导量子比特。



**FIG. 1.** (a) Circuit for a parallel LC-oscillator (quantum harmonic oscillator, QHO), with inductance  $L$  in parallel with capacitance,  $C$ . The superconducting phase on the island is denoted as  $\phi$ , referencing the ground as zero. (b) Energy potential for the QHO, where energy levels are equidistantly spaced  $\hbar\omega_r$  apart. (c) Josephson qubit circuit, where the nonlinear inductance  $L_J$  (represented by the Josephson-subcircuit in the dashed orange box) is shunted by a capacitance,  $C_s$ . (d) The Josephson inductance reshapes the quadratic energy potential (dashed red) into sinusoidal (solid blue), which yields nonequidistant energy levels. This allows us to isolate the two lowest energy levels  $|0\rangle$  and  $|1\rangle$ , forming a computational subspace with an energy separation  $\hbar\omega_{01}$ , which is different than  $\hbar\omega_{12}$ .

约瑟夫森结的非线性让电路的势能从抛物线变成正弦曲线，产生能级差距，进而使 "0→1" 和 "1→2" 跃迁可区分。下面进行数学推导。

**约瑟夫森结的结构：**蓝色的线表示库珀对波函数（也叫超导序参量），可以发现它在势垒层有交叠然后衰减。库珀对波函数的相位至关重要，影响着电压电流特性。（常见为 Al/AIO<sub>x</sub>/Al 结构）

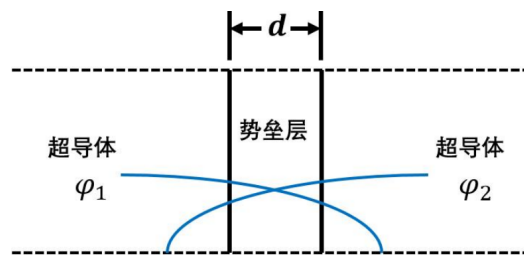


图 1.2 超导约瑟夫森结结构示意图

### 约瑟夫森结：非线性势能与等效电感推导

约瑟夫森结的核心物理量是绝缘势垒两端库珀对波函数（超导序参量）的 **超导相位差**  $\varphi$ 。电路的电磁学行为完全由相位差  $\varphi$  的演化决定。

#### 1. 基础关系（约瑟夫森直流与交流方程）

超导电流与端电压分别满足：

$$I = I_c \sin \varphi \quad (\text{电流-相位关系})$$

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{电压-相位关系})$$

其中  $I_c$  为临界电流， $2e$  为单个库珀对的电荷量。

## 2. 势能推导：从二次抛物势到余弦势

计算超导结吸收的瞬时功率  $P = IV$ ，并对时间积分即可得到势能  $U_J$ ：

$$U_J = \int IV dt = \int (I_c \sin \varphi) \left( \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} \right) dt = \frac{\hbar I_c}{2e} \int_0^\varphi \sin \varphi' d\varphi'$$

积分得到约瑟夫森势能：

$$U_J(\varphi) = E_J(1 - \cos \varphi)$$

其中定义 **约瑟夫森能** 为：

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e}$$

- 普通 LC 谐振器的势能为抛物线型 ( $\propto \varphi^2$ )，导致能级严格等距；
- 约瑟夫森结的势能为余弦型 ( $-\cos \varphi$ )，这种 **非线性势阱** 压低了高能级，使  $\omega_{01} \neq \omega_{12}$ ，成功实现二能级可区分。

## 3. 非线性电感与等效响应

根据电感定义  $V = L \frac{dI}{dt}$ ，结合链式法则  $\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$ ：

$$L(\varphi) = \frac{V}{dI/dt} = \frac{\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}}{I_c \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}} = \frac{\hbar}{2e I_c \cos \varphi}$$

令零相位处的值为 **结特征电感（线性电感）**  $L_J = \frac{\hbar}{2e I_c}$ ，则：

$$L(\varphi) = \frac{L_J}{\cos \varphi}$$

电感值随相位  $\varphi$  动态变化，体现了非线性本质；当  $\cos \varphi < 0$  时，微分电感呈现负值，对外表现为容性阻抗。

## 4. 结电容的充放电能（静电能）

约瑟夫森结本身存在极板电容  $C_J$ （或并联大电容  $C$ ）。设极板聚集了  $n$  对库珀对，总转移电荷量  $Q = 2e \cdot n$ ，其静电储能为：

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(2e \cdot n)^2}{2C} = \left( \frac{e^2}{2C} \right) (2n)^2 = 4E_c n^2$$

其中  $E_c = \frac{e^2}{2C}$  定义为 **单电子充电能**。

通过将电容动能项 ( $\sim n^2$ ) 与非线性势能项 ( $-E_J \cos \varphi$ ) 结合，即可写出超导量子比特的标准量子哈密顿量：

$$\hat{H} = 4E_c \hat{n}^2 - E_J \cos \hat{\varphi}$$

### 2.1.3 transmon

早期超导量子比特（如 Cooper-pair box）对环境中的电荷噪声极度敏感，背景电荷的微小波动会导致比特能级剧烈晃动，破坏量子叠加态，使相干时间短到难以实用。为解决这一痛点，物理学家在约瑟夫森结两端 **并联了一个大电容**  $C_s$ （远大于结自身电容  $C_J$ ），大幅降低了电路的单电子充电能  $E_C$ 。在满足  $E_J \gg E_C$ （通常  $E_J/E_C \sim 50-100$ ）的深度非谐振区下，**电荷噪声对能级跃迁频率的调制被呈指数级抑制**，相干时间提升了数个数量级。这种经过电容分流改良的超导量子比特，被称为 **Transmon**（Transmission line shunted plasma oscillation qubit）。

Transmon 的三大核心优势

- **抗干扰能力极强（长相干时间）**：通过指数级压制电荷噪声，相干时间跃升至百微秒 ( $> 100 \mu\text{s}$ ) 甚至更高量级，为底层控制电子学（如 FPGA）执行数百次门操作提供了充裕的相干时间窗口。
- **非谐性恰到好处（抑制能级泄漏）**：尽管大电容略微弱化了非谐性（典型值在  $-100$  至  $-300 \text{ MHz}$  之间），但该能级差已足够让微波驱动精准锁定在  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  计算空间，有效避免  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  泄漏。
- **控制频段成熟兼容**：工作跃迁频率稳定在 **3-6 GHz**，完全落在标准射频/微波通信频段内，可直接复用成熟的经典射频元器件与微波测控技术，大幅降低了硬件工程化门槛。

2.1.4 电路如何表示量子

2.1.4.1 哈密顿量是什么？

哈密顿量 (Hamiltonian, 用  $\hat{H}$  表示) 用一句话解释：它就是量子力学里描述系统“总能量”的终极数学公式。经典力学里：总能量 = 动能 + 势能。量子力学里：**哈密顿量 = 系统的总能量算符**。重要性体现在诸多方面。

**算出量子比特长什么样（求出能级）**：把电路的哈密顿量带入薛定谔方程  $\hat{H}\psi = E\psi$ ，解出来的能量本征值  $E_0, E_1, E_2 \dots$  就是电路允许存在的台阶能级。能级差就是比特的工作频率（比如  $\omega_{01} = (E_1 - E_0)/\hbar \approx 5 \text{ GHz}$ ）。没有哈密顿量，芯片连用什么频率的微波去操控都不知道。

**指导量子门操作（控制计算）**：薛定谔方程的核心是  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ ，它说明 **哈密顿量直接决定了量子态随时间如何演化**。科学家打入一束微波脉冲，本质上就是在哈密顿量里加了一个“外加驱动项  $\hat{H}_{drive}(t)$ ”。通过精准控制哈密顿量变化多长时间，就能精确让比特完成“翻转”（X 门）或“叠加”（Hadamard 门）。

**设计两比特纠缠（芯片电路连接）**：把两个量子比特用电容或电感连起来时，两者的相互作用会体现为哈密顿量中的**耦合项**（如  $g(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger)$ ）。只有通过哈密顿量，工程师才能精确计算出需要多强的耦合力才能在几十纳秒内做完一个纠缠门（如 CZ 门）。

2.1.4.2 为什么宏观 LC 电路能拥有量子哈密顿量？

在超导量子计算中，LC 谐振腔（微波谐振器）常被当作“人造宏观原子”来研究。经典电路之所以能被量子化，本质是通过分析力学（拉格朗日与哈密顿力学）建立起经典电路变量与微观量子算符之间的 **数学映射**。

1. 建立对应关系：把电路变量映射为坐标与动量

在分析力学中，描述一个物理系统需要一组“广义坐标”和对应的“共轭动量”：

- **广义坐标  $x \rightarrow$  磁通量  $\Phi$ （或超导相位  $\varphi$ ）**：电感储能只依赖磁通量，对应系统的势能项  $V = \frac{\Phi^2}{2L}$ 。
- **共轭动量  $p \rightarrow$  电荷量  $Q$ （或库珀对数  $n$ ）**：电容储能依赖电荷累积，对应系统的动能项  $T = \frac{Q^2}{2C}$ 。

通过拉格朗日量  $\mathcal{L} = T - V$  进行勒让德变换，即可得到经典的哈密顿量：

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} = 4E_C n^2 + \frac{1}{2} E_L \varphi^2$$

其中  $E_C = \frac{e^2}{2C}$  为单电子充电能， $E_L = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{L}$  为电感能。

2. 正则量子化：从经典能量到量子算符

当把宏观电路放入极低温环境（毫开尔文温区）以压制热噪声后，将经典物理量提升为量子算符（“加上帽子”），它们天然满足海森堡不确定性原理下的对易关系：

$$[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i$$

此时，电路的哈密顿算符变为：

$$\hat{H} = 4E_C \hat{n}^2 + \frac{1}{2} E_L \hat{\phi}^2$$

这与物理学中标准的一维量子谐振子 (QHO) 哈密顿量  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$  形式完全一致。通过系数——对照：

- 等效质量  $\frac{1}{2m} \leftrightarrow 4E_C$
- 谐振频率  $\omega_r = \frac{\sqrt{8E_C E_L}}{\hbar} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

### 3. 算符化简与能级结构

为了直观地数出电路里有多少个“微波光子”，引入 **湮灭算符**  $\hat{a}$  与 **产生算符**  $\hat{a}^\dagger$ ：

$$\hat{H} = \hbar\omega_r \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

求解对应的薛定谔方程，得到的本征能级为：

$$E_m = \left( m + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_r, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- **外加微波驱动**：当向电路施加交变电压驱动  $V_d(t)$  时，会在哈密顿量中引入微扰项  $\hat{H}_d(t) \propto \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ ，用于在谐振腔内激发或抽取微波光子。

### 核心意义与应用

- **为何不能做量子比特**：LC 电路的能级是 **严格等间距** 的 ( $\Delta E = \hbar\omega_r$ )，微波脉冲会引发连续跃迁而造成能级泄漏，因此必须改用约瑟夫森结 (Transmon) 来引入非线性。
- **谐振腔的真正用途**：虽然无法作为比特，但该线性 LC 谐振腔在电路量子电动力学 (cQED) 中是不可或缺的 **量子总线 (Bus)** \*与\* **色散读取腔 (Readout Cavity)**，专门用于辅助量子比特的状态测量与耦合互联。

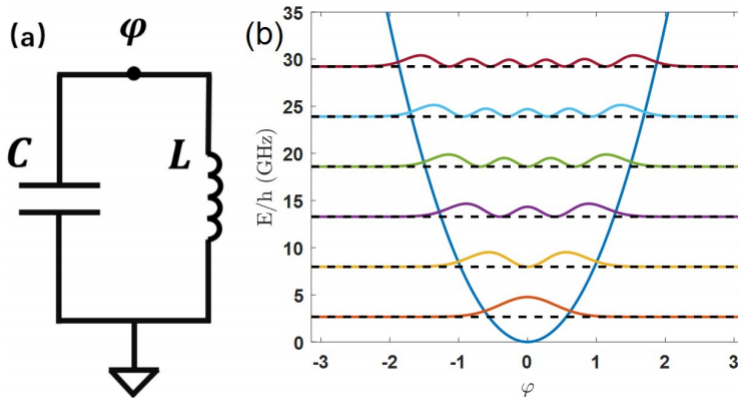


图 1.4 (a) 线性谐振子电路示意图 (b) 线性谐振子能级结构示意图

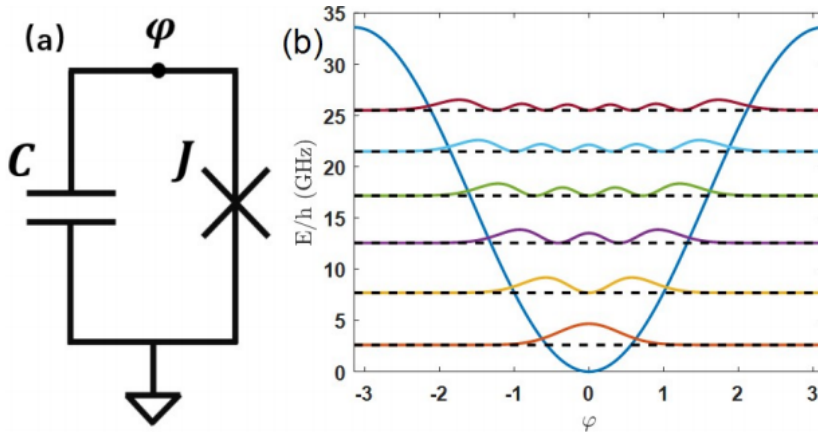


图 1.5 (a) Transmon 量子比特电路示意图 (b) Transmon 量子比特能级结构示意图

### 2.1.4.3 Transmon 的能级来源?

Transmon 的物理结构由一个大电容并联一个约瑟夫森架构成 (如图 a 所示)。其哈密顿量同样遵循“动能 (电容储能) + 势能 (约瑟夫森结储能)”的形式:

$$\hat{H}_q = 4E_C \hat{n}^2 - E_J \cos \hat{\varphi}$$

其中  $E_C$  为充电能,  $E_J$  为约瑟夫森耦合能。

#### 1. 势能展开与微扰近似

该系统的薛定谔方程严格数学解对应马丢函数 (Mathieu Functions), 没有初等的精确解析解。但由于 Transmon 工作在  $E_J \gg E_C$  的深度非谐振区 (相位涨落较小), 可将余弦势能在底部 ( $\hat{\varphi} \approx 0$ ) 展开到四阶项:

$$\cos \hat{\varphi} \approx 1 - \frac{\hat{\varphi}^2}{2!} + \frac{\hat{\varphi}^4}{4!}$$

代入哈密顿量可拆分为两部分:

- **谐振子项 (二次项):**  $4E_C \hat{n}^2 + \frac{1}{2} E_J \hat{\varphi}^2$ , 对应基准振荡频率  $\omega_p \approx \frac{\sqrt{8E_J E_C}}{\hbar}$ 。
- **非谐性微扰项 (四阶项):**  $-\frac{E_J}{24} \hat{\varphi}^4$ , 该项直接打破了抛物线势阱的理想谐振动性。

#### 2. 能级公式与不等间距特性

利用一阶微扰论对上述哈密顿量求解, 得到本征能级  $E_m$  的近似解析解:

$$E_m \approx -E_J + \sqrt{8E_J E_C} \left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{E_C}{12} (6m^2 + 6m + 3)$$

由上式可直接求出相邻能级之间的跃迁能量差:

$$\hbar\omega_{m,m+1} = E_{m+1} - E_m \approx \sqrt{8E_J E_C} - (m+1)E_C$$

具体到低能级跃迁:

- **计算区间跃迁 ( $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ):**  $\hbar\omega_{01} \approx \sqrt{8E_J E_C} - E_C$
- **泄漏能级跃迁 ( $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ):**  $\hbar\omega_{12} \approx \sqrt{8E_J E_C} - 2E_C$

#### 3. 非谐性 (Anharmonicity) 的物理意义

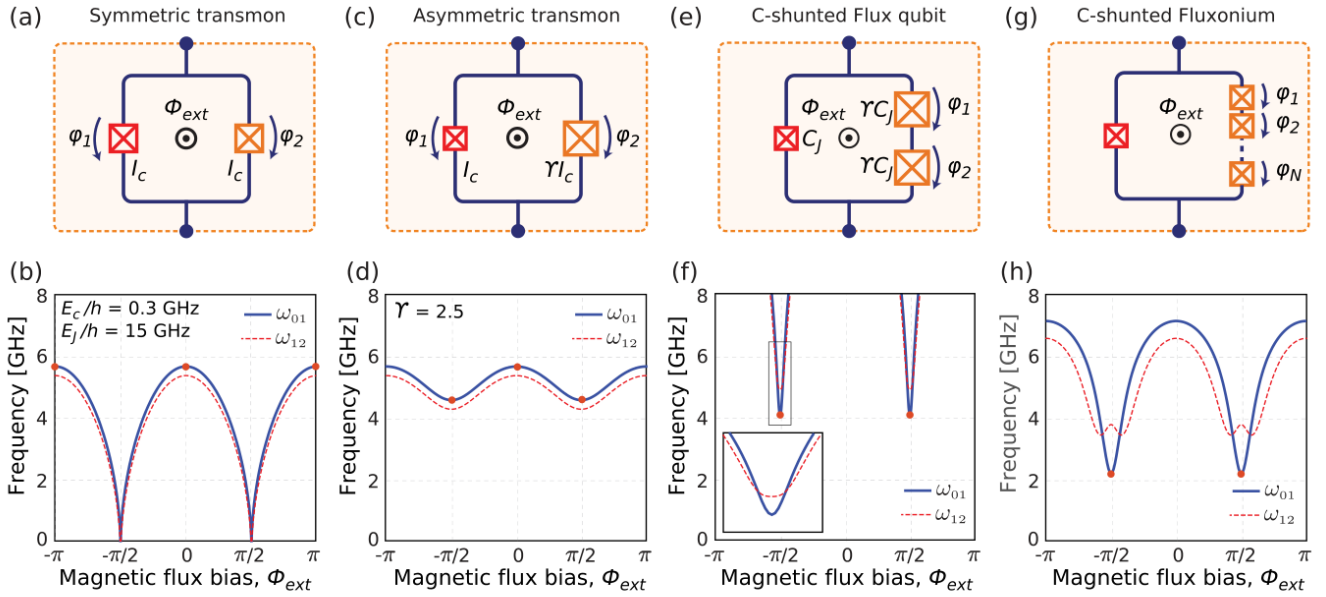
两个相邻跃迁频率的差值定义为系统的 **绝对非谐性**  $\alpha$ :

$$\alpha = \omega_{12} - \omega_{01} \approx -\frac{E_C}{\hbar}$$

- **能级不等距:** 由于负非谐性  $\alpha \approx -E_C$  的存在,  $\omega_{12}$  比  $\omega_{01}$  低了约 100-300 MHz。
- **隔离双能级:** 当使用频率为  $\omega_{01}$  的微波脉冲驱动系统时, 微波频率与  $\omega_{12}$  产生失谐 (Detuned), 无法诱发  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  跃迁, 从而成功将动力学限制在  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  二维计算子空间内。

## 2.2 量子比特的优化

transmon 比特虽然好用, 但不同场景需要不同特性的比特: 有些场景需要能调频率的比特, 有些需要更高非谐性的比特。这一节讲量子比特的发展, 通过优化结构, 让其能够调节频率、获得更好的性能。



**FIG. 2.** Modular qubit circuit representations for capacitively shunted qubit modalities [orange box Fig. 1(c)] and the corresponding qubit transition frequencies for the two lowest energy states as a function of the applied magnetic flux in units of  $\Phi_0$ . (a) and (b) Symmetric transmon qubit, with Josephson energy  $E_J$  is shunted with a capacitor yielding a charging energy  $E_C$ . (c) and (d) Asymmetric transmon qubit, with junction asymmetry  $\gamma = E_{J2}/E_{J1} = 2.5$ . (e) and (f) Capacitively shunted flux qubit, where a small principle junction (red) is shunted with two larger junctions (orange). Parameters are the same as Yan *et al.*<sup>42</sup> (g) and (h) C-shunted fluxonium qubit, where the small junction is inductively shunted with a large array of  $N$  junctions.

图 2 上排 (a、c、e、g) 展示了四种主流电容分流型量子比特的电路拓扑, 下排 (b、d、f、h) 给出了对应的能级跃迁频率随外加磁通  $\Phi_{\text{ext}}$  的响应曲线。

- **横轴:** 外加磁通偏置  $\Phi_{\text{ext}}$ 。
- **纵轴:** 跃迁频率 (GHz)。蓝实线为基态跃迁频率  $\omega_{01}$  ( $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ )，红虚线为第一激发态跃迁频率  $\omega_{12}$  ( $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ )。
- **核心指标:** 两者差值定义为 **非简谐性** ( $\alpha = \omega_{12} - \omega_{01}$ )，决定系统能否将跃迁严格限制在二能级子空间；曲线的极值点（平缓处）对应 **磁通稳健点 (Sweet Spot)**，此处斜率  $\frac{\partial \omega_{01}}{\partial \Phi_{\text{ext}}} \approx 0$ ，对一阶磁通噪声免疫，相干时间最长。

### ① 对称可调 Transmon (Symmetric Split Transmon)

- **电路原理 (图 2a) :**

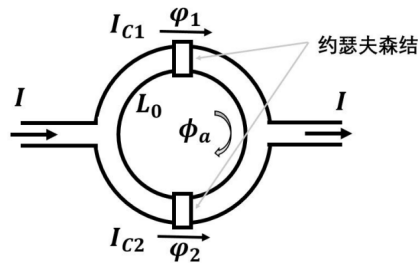


图 1.3 超导量子干涉器结构图

- 将单结 Transmon 的固定结替换为由两个相同约瑟夫森结 ( $I_c$  相同) 构成的闭合环路——**直流超导量子干涉仪 (DC-SQUID)**。通过环路的外加磁通  $\Phi_{\text{ext}}$  会在两结间诱导相位差，实现等效约瑟夫森能量  $E_J(\Phi_{\text{ext}})$  的连续调控：

$$I = I_{c1} \sin \varphi_1 + I_{c2} \sin \varphi_2$$

由于磁通量子化条件，环路满足  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}$ 。对称情况下 ( $I_{c1} = I_{c2} = I_c$ )，利用和差化积化简总超导电流：

$$I = 2I_c \cos\left(\frac{\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}\right) \sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}\right)$$

对应的等效临界电流与有效约瑟夫森能为：

$$I'_c(\Phi_{\text{ext}}) = 2I_c \left| \cos \left( \frac{\pi \Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right) \right|, \quad E'_J(\Phi_{\text{ext}}) = 2E_J \left| \cos \left( \frac{\pi \Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right) \right|$$

外加磁通可使有效  $E'_J$  在  $0 \sim 2E_J$  之间调谐，从而大范围改变比特工作频率（图 2b）。

- **能谱特征（图 2b）：**

能谱呈深周期性凹陷，非简谐性为负（ $\omega_{12} < \omega_{01}$ ， $\alpha \approx -E_c$ ）。由于  $\alpha$  的绝对值相对有限（约  $-200 \sim -300$  MHz），高速控制时通常需结合 DRAG（Derivative Removal by Adiabatic Gate）微波脉冲技术以抑制  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  的泄漏。在半磁通偏置点处频率下潜至零，调谐范围过宽导致其对磁通抖动极为敏感。

## ② 不对称可调 Transmon (Asymmetric Split Transmon)

- **电路设计（图 2c）：**

为缓解对称 Transmon 在调频时对磁通噪声高度敏感的缺陷，将 SQUID 环路的两个结设计为不同尺寸（结不对称比  $\gamma = I_{c2}/I_{c1} = 2.5$ ）。

- **能谱特征（图 2d）：**

等效约瑟夫森能在极小值点不再下潜归零，而是保留了底限  $\sim (\gamma - 1)E_{J1}$ 。能谱曲线起伏显著变平缓（频率调谐范围收窄至数 GHz 内），大幅降低了  $\frac{\partial \omega_{01}}{\partial \Phi_{\text{ext}}}$  的斜率，有效抑制了磁通漂移引起的退相位，兼顾了频率可调性与抗噪能力。

## ③ 电容分流磁通比特 (C-shunted Flux Qubit)

- **电路设计（图 2e）：**

采用一个主约瑟夫森结与两只较大面积的结（ $\gamma C_J$ ）构成超导环路，并额外并联大电容进行分流。其势能面呈现双阱特征，基态与激发态由环路中的顺时针与逆时针持续电流态线性叠加而成。

- **能谱特征（图 2f）：**

在半磁通偏置点（ $\Phi_{\text{ext}} = \pm\pi/2$  附近，即  $\pm 0.5 \Phi_0$ ）， $\omega_{01}$  出现深窄的能隙极小点，且 **非简谐性转为显著的正值**（ $\omega_{12} > \omega_{01}$ ， $\alpha > 0$ ）。正非简谐性使得高能级跃迁门槛变高，天然杜绝了向  $|2\rangle$  态泄漏的通道。

## ④ 电容分流磁通量子 (C-shunted Fluxonium)

- **电路设计（图 2g）：**

由一个小面积约瑟夫森结和一个由数十至上百个大结组成的超电感阵列（Superinductance Array）闭环并联，外加电容分流。超电感提供了极大的线性电感且没有电阻损耗，彻底消除了传统磁通比特中的相位滑移与电荷噪声。

- **能谱特征（图 2h）：**

- **超大正非简谐性：**在半磁通偏置点（ $\pm\pi/2$ ）处， $\omega_{01}$  处于深能谷（通常只有几百 MHz 到 1~2 GHz），而  $\omega_{12}$  维持在数 GHz 之上（ $\omega_{12} \gg \omega_{01}$ ），呈现极强的正非简谐性，彻底消除能级泄漏。
- **超长相干时间：**计算态波函数在半磁通点具有强烈的空间正交偶极矩保护，加上极低的跃迁频率，使得能级跃迁对介电损耗和磁通噪声具备天然双重屏蔽（毫秒级相干时间），已成为构建高精度容错量子计算的重要前沿路线。

## 2.3 量子比特相互作用

### 量子比特之间怎么通信与协调？

单个比特再好用，也做不了计算——得让比特之间能产生纠缠，这就需要耦合。这一节主要讲两种耦合方式：电容耦合和电感耦合。

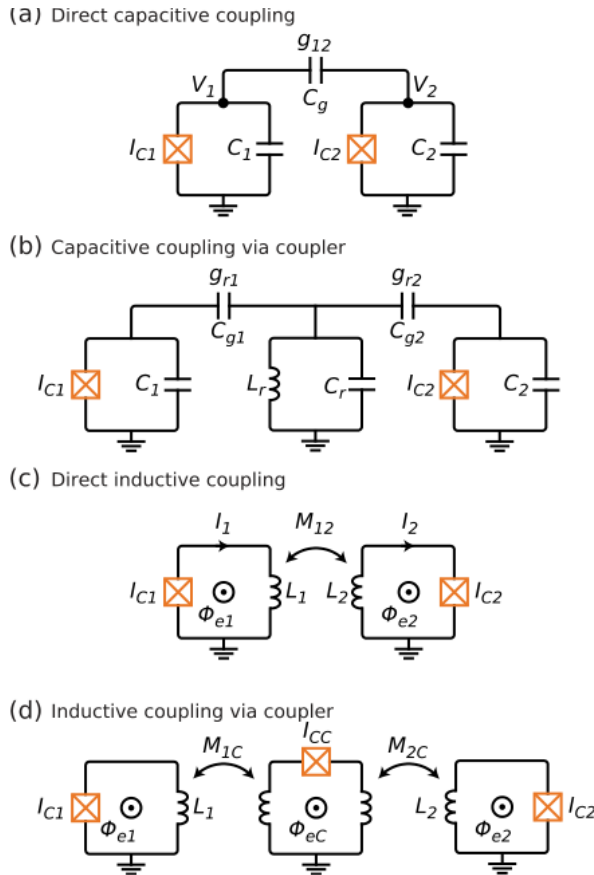


FIG. 3. Schematic of capacitive and inductive coupling schemes between two superconducting qubits, labeled 1 and 2. (a) Direct capacitive coupling, where the voltage nodes of two qubits  $V_1$  and  $V_2$  are connected by a capacitance  $C_g$ . (b) Capacitive coupling via a coupler in the form of a linear resonator. (c) Direct inductive coupling, where the two qubits are coupled via mutual inductance,  $M_{12}$ . (d) Inductive coupling via mutual inductances  $M_{1c}$  and  $M_{2c}$  to a frequency-tunable coupler.

## 1. 电容耦合——电场

在两个比特的电容板之间再放一个小电容（叫耦合电容），用电场传递信号。作用是让两个比特能交换状态：比如比特 A 是  $|1\rangle$ 、比特 B 是  $|0\rangle$ ，耦合后变成 A 是  $|0\rangle$ 、B 是  $|1\rangle$ ，交换后就能产生纠缠效应（实现纠缠门 iSWAP 门的基础）。

- **(a) 直接电容耦合 (Direct capacitive coupling)**：两个量子比特的电压节点 ( $V_1$  和  $V_2$ ) 之间直接接一个耦合电容  $C_g$ 。一个比特的电荷波动（电压变化）会通过  $C_g$  的电场传递给另一个比特，实现比特间的相互作用。
- **(b) 通过耦合器的电容耦合 (Capacitive coupling via coupler)**：两个比特不直接相连，而是分别通过耦合电容连接到一个线性谐振器。可通过调节谐振器的参数灵活控制两个比特的耦合强度，还能让原本距离远的比特也实现耦合。

## 2. 电感耦合——磁场

让两个比特的环路靠得近一点，用磁场传递信号。作用是不交换状态，只给两个比特都为  $|1\rangle$  的情况加个相位：比如两个比特都是  $|1\rangle$ ，交流后会多一个  $\pi$  相位，不改变状态，但改变相位。

- **(c) 直接电感耦合 (Direct inductive coupling)**：两个量子比特的超导环路（电感  $L_1$ 、 $L_2$ ）之间通过互感  $M_{12}$  耦合。电流  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $\phi_{e1}$ 、 $\phi_{e2}$  会影响耦合。一个比特的电流波动（磁场变化）会通过  $M_{12}$  的磁场传递给另一个比特，实现相互作用。
- **(d) 通过耦合器的电感耦合 (Inductive coupling via coupler)**：两个比特通过中间耦合器（带约瑟夫森结  $I_{cc}$  和外部磁通  $\phi_{ec}$ ）间接连接，利用互感  $M_{1c}$ 、 $M_{2c}$  传递磁场作用。耦合器的频率可调节，能灵活开关或调整两个比特的耦合强度，适配不同的量子操作需求。

2.4 噪声与退相干

核心问题：为什么量子比特这么敏感？如何增加相干时间？（噪声分类、Bloch-Redfield 模型、1/f 噪声等常见噪声源，以及动态解耦等抑制技术）

2.4.1 噪声的类型

- **系统噪声 (Systematic noise)**：比如给 qubit 发一个让它转 180° 的微波脉冲，但脉冲强度没调好，实际只转了 178°，每次都差 2°。这类噪声 **能校准**。
- **随机噪声 (Stochastic noise)**：控制线路里的电阻发热产生约翰逊噪声（电压随机跳），或 qubit 周围的电路表面有小电荷陷阱、电荷偶尔跳一下，导致 qubit 频率乱飘。每次不一样，**难校准**，要抗干扰设计或动态抵消。
- **噪声强度 & qubit 敏感度**：噪声强度指干扰的大小；qubit 敏感度指 qubit 对某种噪声的抵抗力。

2.4.2 噪声和退相干建模

噪声是怎么影响 qubit 的？用 Bloch 球和 Bloch-Redfield 模型，解释噪声怎么让 qubit 丢信息。

1. 布洛赫球

- 北极：qubit 的 "0 态" ( $|0\rangle$ )；南极：qubit 的 "1 态" ( $|1\rangle$ )；
- 赤道：qubit 的 "叠加态"，比如 "一半停止、一半前进" ( $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ )；
- 球表面是纯态，qubit 的状态很明确；球内部是混合态，qubit 的状态模糊了。比如球中心（完全不知道是  $|0\rangle$  还是  $|1\rangle$ ），这就是噪声导致的退相干。

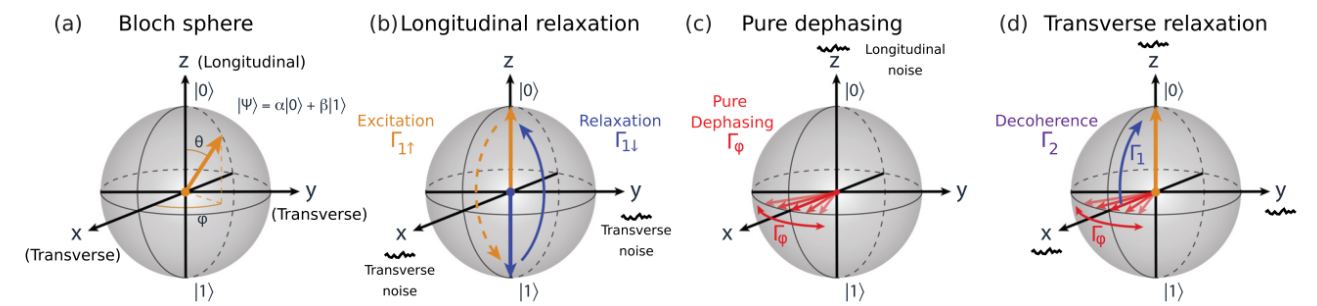


FIG. 4. Transverse and longitudinal noise represented on the Bloch sphere. (a) Bloch sphere representation of the quantum state  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . The qubit quantization axis—the z axis—is “longitudinal” in the qubit frame, corresponding to  $\sigma_z$  terms in the qubit Hamiltonian. The x-y plane is “transverse” in the qubit frame, corresponding to  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  terms in the qubit Hamiltonian. (b) Longitudinal relaxation results from the energy exchange between the qubit and its environment, due to transverse noise that couples to the qubit in the x-y plane and drives transitions  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ . A qubit in-state  $|1\rangle$  emits energy to the environment and relaxes to  $|0\rangle$  with a rate  $\Gamma_{1\downarrow}$  (blue arched arrow). Similarly, a qubit in-state  $|0\rangle$  absorbs energy from the environment, exciting it to  $|1\rangle$  with a rate  $\Gamma_{1\uparrow}$  (orange arched arrow). In the typical operating regime  $k_B T \ll \hbar\omega_q$ , the up-rate is suppressed, leading to the overall decay rate  $\Gamma_1 \approx \Gamma_{1\downarrow}$ . (c) Pure dephasing in the transverse plane arises from longitudinal noise along the z axis that fluctuates the qubit frequency. A Bloch vector along the x-axis will diffuse clockwise or counterclockwise around the equator due to the stochastic frequency fluctuations, depolarizing the azimuthal phase with a rate  $\Gamma_\phi$ . (d) Transverse relaxation results in a loss of coherence at a rate  $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \Gamma_\phi$ , due to a combination of energy relaxation and pure dephasing. Pure dephasing leads to decoherence of the quantum state  $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$ , initially pointed along the x-axis. Additionally, the excited state component of the superposition state may relax to the ground state, a phase-breaking process that loses the orientation of the vector in the x-y plane.

2. Bloch-Redfield 模型

这个模型把退相干分成三种情况，对应 Bloch 球上箭头的三种变化，每种都和不同噪声有关。图 4 的 (b)(c)(d) 分别画了这三种情况。

(1) **纵向 relaxation (图 (b))**：qubit 从高能态  $|1\rangle$  把能量传给环境（周围的电路、热量影响），回到低能态  $|0\rangle$ ，这个过程的时间常数叫  $T_1$ 。（比如  $T_1 = 85\mu s$ ，就是 qubit 从  $|1\rangle$  到  $|0\rangle$ ，能量剩  $1/e$  大概要 85 微秒）

- 蓝色弯箭头： $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ （能量释放，最常见，因为低温下环境吸收能量容易）；
- 橙色弯箭头： $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ （能量吸收，很少见，因为低温下环境没多少能量给 qubit）。

(2) 纯 dephasing (图 4 (c)) : qubit 没丢能量 (还是  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的叠加), 但叠加态的相位乱了。原本是  $|0\rangle + |1\rangle$ , 变成  $|0\rangle + i|1\rangle$ , 再变成  $|0\rangle - |1\rangle$ , 最后完全分不清相位, 箭头在赤道上 "转圈扩散"。

原因是纵向噪声 (比如磁通噪声) 让 qubit 频率乱飘, 叠加态的两个成分 ( $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ ) 振动速度不一样, 慢慢就不同步了。纯 dephasing 不丢能量 (箭头还在赤道面, 没上下动), 只是相位乱了, 可以用脉冲把相位掰回来。

(3) 横向 relaxation (图 4 (d)) : 就是上面两个的叠加效果。

$T_2$  代表总退相干速度, 等于  $T_1$  导致的能量丢失加上  $T_\phi$  导致的相位乱掉, 公式是  $1/T_2 = 1/(2T_1) + 1/T_\phi$  (如  $T_1 = 85\mu s$ ,  $T_2$  可能只有  $95\mu s$ )。

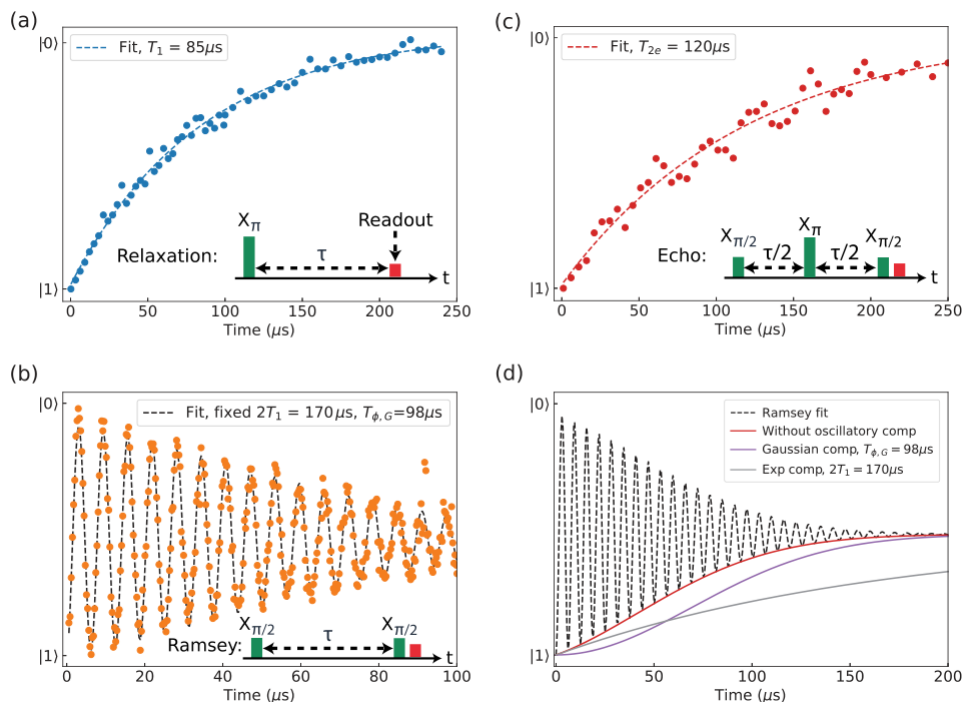
- 红色: 相位乱 ( $T_\phi$ ), 箭头在赤道扩散;
- 蓝色: 能量掉 ( $T_1$ ), 箭头从赤道慢慢往北极缩;
- 结果: 箭头既缩短又扩散, 很快就到球中心, 信息丢光。

### 2.4.3 1/f 噪声

前面说的  $T_1$ 、 $T_2$  都是指数衰减 (箭头缩短的速度是固定的)。实际中有一种常见噪声叫 1/f 噪声, 会让衰减变成 "非指数" (曲线更陡或更平缓), 这种低频噪声危害更大。

对 qubit 的影响: 1/f 噪声是低频波动多,  $T_2$  衰减不是直线, 而是高斯曲线 (先慢后快)。

下图是测  $T_1$  和  $T_2$  的实验结果, 四个图对应不同测量方法:



- 图 (a) 测  $T_1$ : 给 qubit 发  $X\pi$  脉冲 (让它从  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ), 不断测量量子比特状态, 结果是指数下降, 拟合出  $T_1 = 85\mu s$  ( $1/e$  状态处)。
- 图 (b) 测  $T_2^*$  (没抵消低频噪声的  $T_2$ ): 用 Ramsey 干涉, 发两个  $X\pi/2$  脉冲, 中间等时间  $\tau$ , 结果是振荡衰减, 衰减快, 拟合出  $T_2^* = 95\mu s$ 。
- 图 (c) 测  $T_2^E$  (抵消了部分低频噪声的  $T_2$ ): 用 Hahn 回波, 在两个  $X\pi/2$  中间加一个  $X\pi$  脉冲 (相当于重置相位), 衰减变慢, 拟合出  $T_2^E = 120\mu s$  (比  $T_2^*$  长, 说明抵消了部分 1/f 噪声)。
- 图 (d) 分解衰减原因: 把图 5 (b) 的数据拆成指数部分 ( $T_1$  导致) 和高斯部分 (1/f 噪声导致), 两个加起来刚好拟合实验数据, 说明 1/f 噪声确实让衰减变了样。

2.4.4 常见的噪声例子

- 1. **电荷噪声 (Charge noise) ——静电干扰**: 电路表面的 "小电荷陷阱" (基板里的杂质、金属表面的缺陷), 电荷偶尔跳来跳去。主要让  $T_1$  变短 (能量跑掉); 如果 qubit 的  $E_J/E_C$  不够大 (transmon 没做好), 还会让  $T_\varphi$  变短 (相位乱)。
- 2. **磁通噪声 (Flux noise) ——磁场波动**: qubit 表面的磁矩 (吸附的氧气分子、金属表面的未配对电子) 偶尔翻转, 导致周围磁场波动。主要让  $T_\varphi$  变短 (相位乱), 因为磁场波动会让 Split Transmon 这类可调频率的 qubit 频率乱飘。
- 3. **光子数波动 (Photon number fluctuations) ——杂光干扰**: qubit 旁边的读出谐振腔里有残留光子 (从室温传来的微波、电路发热产生的光子), 光子数量偶尔变多变少。让  $T_\varphi$  变短 (相位乱), 因为光子数变化会让 qubit 频率偶尔偏移。
- 4. **准粒子 (Quasiparticles) ——电路里的小杂质**: 超导材料里的未配对电子 (正常超导是电子成对的, 准粒子是单个电子), 可能由热量、辐射产生。让  $T_1$  变短 (能量跑掉), 因为准粒子会带走 qubit 的能量, 还可能让 qubit 误跳到高能级。

2.5 量子比特控制

这是咱们实验室重点研究方向之一。本章讲如何操控超导量子比特, 从经典逻辑门的基础讲起, 逐步过渡到量子比特的具体控制方法。

2.5.1 经典计算机中的布尔逻辑门

**经典部分**: 主要讲了经典电路的与或非门的真值表和特点, 我们都很熟了, 这里不展开。文章里所说的经典计算, 就是不同门实现的组合逻辑; 文章后面会用经典计算和量子门进行比较。

| GATE                                                                                             | CIRCUIT SYMBOL                                                                      | TRUTH TABLE |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------|
| NOT<br>The output is 1 when the input is 0 and 0 when the input is 1.                            |  | Input       | Output |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0           | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1           | 0      |
| AND<br>The output is 1 only when both inputs are 1, otherwise the output is 0.                   |  | Input       | Output |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 0         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 1         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 0         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 1         | 1      |
| OR<br>The output is 0 only when both inputs are 0, otherwise the output is 1.                    |  | Input       | Output |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 0         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 1         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 0         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 1         | 1      |
| NAND<br>The output is 0 only when both inputs are 1, otherwise the output is 1.                  |  | Input       | Output |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 0         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 1         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 0         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 1         | 0      |
| NOR<br>The output is 1 only when both inputs are 0, otherwise the output is 0.                   |  | Input       | Output |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 0         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 1         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 0         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 1         | 0      |
| XOR<br>The output is 1 only when the two inputs have different value, otherwise the output is 0. |  | Input       | Output |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 0         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 1         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 0         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 1         | 0      |
| XNOR<br>The output is 1 only when the two inputs have the same value, otherwise the output is 0. |  | Input       | Output |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 0         | 1      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 0 1         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 0         | 0      |
|                                                                                                  |                                                                                     | 1 1         | 1      |

FIG. 8. Classical single-bit and two-bit Boolean logic gates. For each gate, the name, a short description, circuit representation, and input/output truth tables are presented. The numerical values in the truth table correspond to the classical bit values 0 and 1. Adapted from Ref. 171.

**通用门集：**无需所有门，仅需 NOT+AND、或单独的 NAND、或单独的 NOR，即可组合出任意布尔逻辑，比如加法、乘法。

2.5.2 量子计算机中的量子逻辑门

量子比特不止 0 和 1，还能是 0 和 1 的叠加态。量子门需能操控叠加态，且均为 **么正操作（可逆）**。

单比特门操作，相当于是比特在布洛赫上的旋转操作，**可类比地球上飞机的航线**

| H                                                                                                                   | X                                              | Y                                               | Z                                               | S                                              | T                                                                 | S <sup>†</sup>                                  | T <sup>†</sup>                                                    | R <sub>x</sub>                                                                                                                       | R <sub>y</sub>                                                                                                                  | R <sub>z</sub>                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$ |

双/多比特门操作，将多比特联系起来（量子特性）

| CX                                                                       | CZ                                                                        | CPhase                                                                    | CCPhase                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$ |

量子门的**完备性**：（注意各平台给的基础门情况）  
H, T, CNOT  
或  
... 详见《量子计算与量子信息》4.5节

✧ 研究表明，受控西门总可以等价于一些由单量子比特门和 CNOT 构成的量子线路。而单量子比特门总可以通过 Hadamard 门、相位门和 Pauli 门来构造。单量子比特门和 CNOT 门可以实现任意维上的两级酉运算，任意的酉运算又可以分解成一些两级酉运算的乘积，使得任意酉运算可以由一些单量子比特门和受控非门实现，即 CNOT 门和单量子比特门的结合具有通用性。比如 Hadamard 门、 $\frac{\pi}{8}$  门和 CNOT 门可以以任意精度近似任意酉运算。

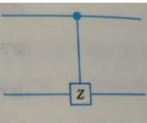


图 1-5 受控 Z 门

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$
$$R_x = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$
$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad \text{CZ} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

1. 单比特门

量子比特的状态用布洛赫球表示（一个单位球，北极是 0 态，南极是 1 态，球面上的点是叠加态，球内部则是退相干后的状态）。单量子比特门就是让布洛赫球上的点绕某个轴旋转固定角度。下图用表格呈现了不同门的名称、电路符号、矩阵表示、真值表、布洛赫球旋转。

| GATE                                                                                                                                                                                               | CIRCUIT REPRESENTATION                   | MATRIX REPRESENTATION                                                  | TRUTH TABLE                                                                                                                                                                                                                                                   | BLOCH SPHERE |        |             |                                          |             |                                          |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------|-------------|------------------------------------------|-------------|------------------------------------------|--|
| I Identity-gate: no rotation is performed.                                                                                                                                                         |                                          | $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                     | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 0\rangle</math></td><td><math> 0\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 1\rangle</math></td><td><math> 1\rangle</math></td></tr></table>                                                           | Input        | Output | $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$                              | $ 1\rangle$ | $ 1\rangle$                              |  |
| Input                                                                                                                                                                                              | Output                                   |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 0\rangle$                                                                                                                                                                                        | $ 0\rangle$                              |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 1\rangle$                                                                                                                                                                                        | $ 1\rangle$                              |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| X gate: rotates the qubit state by $\pi$ radians ( $180^\circ$ ) about the x-axis.                                                                                                                 |                                          | $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$                     | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 0\rangle</math></td><td><math> 1\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 1\rangle</math></td><td><math> 0\rangle</math></td></tr></table>                                                           | Input        | Output | $ 0\rangle$ | $ 1\rangle$                              | $ 1\rangle$ | $ 0\rangle$                              |  |
| Input                                                                                                                                                                                              | Output                                   |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 0\rangle$                                                                                                                                                                                        | $ 1\rangle$                              |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 1\rangle$                                                                                                                                                                                        | $ 0\rangle$                              |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| Y gate: rotates the qubit state by $\pi$ radians ( $180^\circ$ ) about the y-axis.                                                                                                                 |                                          | $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$                    | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 0\rangle</math></td><td><math>i 1\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 1\rangle</math></td><td><math>-i 0\rangle</math></td></tr></table>                                                        | Input        | Output | $ 0\rangle$ | $i 1\rangle$                             | $ 1\rangle$ | $-i 0\rangle$                            |  |
| Input                                                                                                                                                                                              | Output                                   |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 0\rangle$                                                                                                                                                                                        | $i 1\rangle$                             |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 1\rangle$                                                                                                                                                                                        | $-i 0\rangle$                            |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| Z gate: rotates the qubit state by $\pi$ radians ( $180^\circ$ ) about the z-axis.                                                                                                                 |                                          | $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$                    | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 0\rangle</math></td><td><math> 0\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 1\rangle</math></td><td><math>- 1\rangle</math></td></tr></table>                                                          | Input        | Output | $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$                              | $ 1\rangle$ | $- 1\rangle$                             |  |
| Input                                                                                                                                                                                              | Output                                   |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 0\rangle$                                                                                                                                                                                        | $ 0\rangle$                              |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 1\rangle$                                                                                                                                                                                        | $- 1\rangle$                             |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| S gate: rotates the qubit state by $\frac{\pi}{2}$ radians ( $90^\circ$ ) about the z-axis.                                                                                                        |                                          | $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$    | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 0\rangle</math></td><td><math> 0\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 1\rangle</math></td><td><math>e^{i\frac{\pi}{2}} 1\rangle</math></td></tr></table>                                         | Input        | Output | $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$                              | $ 1\rangle$ | $e^{i\frac{\pi}{2}} 1\rangle$            |  |
| Input                                                                                                                                                                                              | Output                                   |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 0\rangle$                                                                                                                                                                                        | $ 0\rangle$                              |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 1\rangle$                                                                                                                                                                                        | $e^{i\frac{\pi}{2}} 1\rangle$            |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| T gate: rotates the qubit state by $\frac{\pi}{4}$ radians ( $45^\circ$ ) about the z-axis.                                                                                                        |                                          | $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$    | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 0\rangle</math></td><td><math> 0\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 1\rangle</math></td><td><math>e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle</math></td></tr></table>                                         | Input        | Output | $ 0\rangle$ | $ 0\rangle$                              | $ 1\rangle$ | $e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle$            |  |
| Input                                                                                                                                                                                              | Output                                   |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 0\rangle$                                                                                                                                                                                        | $ 0\rangle$                              |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 1\rangle$                                                                                                                                                                                        | $e^{i\frac{\pi}{4}} 1\rangle$            |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| H gate: rotates the qubit state by $\pi$ radians ( $180^\circ$ ) about an axis diagonal in the x-z plane. This is equivalent to an X-gate followed by a $\frac{\pi}{2}$ rotation about the y-axis. |                                          | $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 0\rangle</math></td><td><math>\frac{ 0\rangle +  1\rangle}{\sqrt{2}}</math></td></tr><tr><td><math> 1\rangle</math></td><td><math>\frac{ 0\rangle -  1\rangle}{\sqrt{2}}</math></td></tr></table> | Input        | Output | $ 0\rangle$ | $\frac{ 0\rangle +  1\rangle}{\sqrt{2}}$ | $ 1\rangle$ | $\frac{ 0\rangle -  1\rangle}{\sqrt{2}}$ |  |
| Input                                                                                                                                                                                              | Output                                   |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 0\rangle$                                                                                                                                                                                        | $\frac{ 0\rangle +  1\rangle}{\sqrt{2}}$ |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |
| $ 1\rangle$                                                                                                                                                                                        | $\frac{ 0\rangle -  1\rangle}{\sqrt{2}}$ |                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                               |              |        |             |                                          |             |                                          |  |

- **Identity (恒等门)**：不旋转，状态不变。
- **X 门**：绕 x 轴旋转  $180^\circ$ ，作为量子的 NOT 门，让北极  $\rightarrow$  南极。
- **Y 门**：绕 y 轴旋转  $180^\circ$ 。
- **Z 门**：绕 z 轴旋转  $180^\circ$ ，就改变相位。
- **S 门**：绕 z 轴旋转  $90^\circ$ 。
- **T 门**：绕 z 轴旋转  $45^\circ$ 。
- **H 门 (哈达玛门)**：绕 x-z 对角轴旋转  $180^\circ$ ，将纯态转为均匀叠加态，让北极  $\rightarrow$  赤道。

单比特门的最小门组是 H 和 T 门，再加一个双比特门 CNOT，就可以实现任意一个多比特门。

$$H = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

哈达玛门：0 态变到 X 轴正方向  $|+\rangle$ ，也就是  $(|0\rangle + |1\rangle)/2$  这个方向；1 态变到 X 轴负方向  $|-\rangle$ ，也就是  $(|0\rangle - |1\rangle)/2$  这个方向。用哈达玛门可以快速记忆  $|-\rangle$  和正的  $|+\rangle$  是怎么表示。几何上就是绕 xz 对角线轴旋转  $180^\circ$ 。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

T 门就是 0 态不变，1 态给他加 45° 相位，绕 Z 轴逆时针转动 45 度（注意要用右手定则来判断角度）。

## 2. 双比特门

双量子比特门能让两个独立的量子比特产生纠缠（一个量子比特的状态会直接影响另一个，即使分开也关联）。

| GATE                                                                                                      | CIRCUIT REPRESENTATION | MATRIX REPRESENTATION                                                                                             | TRUTH TABLE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| Controlled-NOT gate:<br>apply an X-gate to the target qubit if the control qubit is in state $ 1\rangle$  |                        | $\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$    | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 00\rangle</math></td><td><math> 00\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 01\rangle</math></td><td><math> 01\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 10\rangle</math></td><td><math> 11\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 11\rangle</math></td><td><math> 10\rangle</math></td></tr></table>  | Input | Output | $ 00\rangle$ | $ 00\rangle$ | $ 01\rangle$ | $ 01\rangle$ | $ 10\rangle$ | $ 11\rangle$ | $ 11\rangle$ | $ 10\rangle$  |
| Input                                                                                                     | Output                 |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 00\rangle$                                                                                              | $ 00\rangle$           |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 01\rangle$                                                                                              | $ 01\rangle$           |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 10\rangle$                                                                                              | $ 11\rangle$           |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 11\rangle$                                                                                              | $ 10\rangle$           |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| Controlled-phase gate:<br>apply a Z-gate to the target qubit if the control qubit is in state $ 1\rangle$ |                        | $\text{CPHASE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | <table><tr><th>Input</th><th>Output</th></tr><tr><td><math> 00\rangle</math></td><td><math> 00\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 01\rangle</math></td><td><math> 01\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 10\rangle</math></td><td><math> 10\rangle</math></td></tr><tr><td><math> 11\rangle</math></td><td><math>- 11\rangle</math></td></tr></table> | Input | Output | $ 00\rangle$ | $ 00\rangle$ | $ 01\rangle$ | $ 01\rangle$ | $ 10\rangle$ | $ 10\rangle$ | $ 11\rangle$ | $- 11\rangle$ |
| Input                                                                                                     | Output                 |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 00\rangle$                                                                                              | $ 00\rangle$           |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 01\rangle$                                                                                              | $ 01\rangle$           |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 10\rangle$                                                                                              | $ 10\rangle$           |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |
| $ 11\rangle$                                                                                              | $- 11\rangle$          |                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |        |              |              |              |              |              |              |              |               |

**CNOT 门（受控非门）**：有控制比特和目标比特，控制比特的状态决定是否翻转目标比特。只有当控制比特是 1 时，才翻转目标比特；控制比特是 0 时，目标比特不变。真值表（控制比特在前，目标在后）：输入 00→00，01→01，10→11，11→10。

能产生纠缠：输入控制比特  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 、目标比特  $|0\rangle$ ，输出后会变成  $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ 。这是典型的贝尔纠缠态，两个量子比特再也无法拆成独立的状态。网上搜的纠缠的定义如下。

### 数学定义

假设一个复合系统是由两个子系统A、B所组成，这两个子系统A、B的希尔伯特空间分别为  $H_A, H_B$ 。其复合态表示为  $|\Psi_{AB}\rangle$ ，如果  $|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$ ，则  $|\Psi_A\rangle$  是  $H_A$  中的状态， $|\Psi_B\rangle$  是  $H_B$  中的状态。

如果  $|\Psi_{AB}\rangle$  不可分离的，则它是纠缠态，也就是说，如果它不能写成  $|\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$ ，则子系统A、B相互纠缠。

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CNOT 门你会发现矩阵更大，因为是双比特门，有四个态 00、01、10、11。可以发现 10 的时候输出 11，11 的时候输出 10，明显第一个为控制比特——要是控制比特为 1，另外一个目标比特必须反转。双比特门不能看作是旋转了，而是纠缠。

| 门    | 矩阵形式                                           | 关系            |
|------|------------------------------------------------|---------------|
| CNOT | $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ | 控制比特为 1 时执行 X |
| CZ   | $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ | 控制比特为 1 时执行 Z |
| SWAP | 交换两比特状态                                        | CNOT + 单门组合实现 |

可以对受控比特来说当做有条件的  $X_\pi$  门。

**纠正理解：**输入是两个端口，输出应该也是两个值才对？——量子门操作的是 "态的变换"，多比特门会同时改变多个比特的联合态。改变的都是比特的联合态。

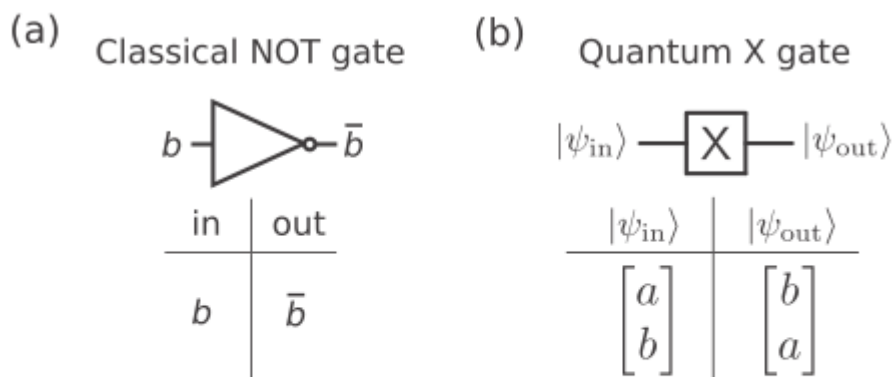
**CPHASE 门（受控相位门，也叫 CZ 门）：**同样有控制和目标比特两个端口，控制和目标比特可互换。只有当控制比特和目标比特都为 1 时，才给目标比特加一个  $\pi$  相位（不改变测量结果，但会影响叠加态的干涉）；其他情况不变。真值表：输入  $00 \rightarrow 00$ ,  $01 \rightarrow 01$ ,  $10 \rightarrow 10$ ,  $11 \rightarrow 11$  (-1 代表相位变负)，仅改变相位。

和 CNOT 门能互相转换（加两个 H 门就行）： $U_{CNOT} = (I \otimes H)U_{CPHASE}(I \otimes H)$ （H 门作用于目标比特后，CPHASE 等效为 CNOT）。

### 3. 通用门集

量子计算的通用门集需满足 "任意单量子比特门 + 一个纠缠双量子比特门"，即可组合出所有量子操作（包括 Shor 算法、VQE 算法）。这与经典通用门集（NAND）不同。**纠缠门提供量子特性，单比特门调整叠加态。**

#### 2.5.3 经典门与量子门比较



**FIG. 11.** Comparison of the classical inverter (NOT) gate and quantum bit flip (X) gate. (a) The classical NOT gate that inverts the state of a classical bit. (b) The quantum X gate, which flips the amplitudes of the two components of a quantum bit.

#### 经典 NOT 门与量子 X 门的对比及本质区别

##### 1. 经典 NOT 门（非门，图 11a）：

作用于离散经典比特  $b \in \{0, 1\}$ ，输出为反相值  $\bar{b}$ 。仅有  $0 \rightarrow 1$  与  $1 \rightarrow 0$  两种确定性的翻转状态，不涉及任何概率幅或相位。

##### 2. 量子 X 门（比特翻转门，图 11b）：

作用于二维希尔伯特空间中的态矢  $|\psi_{in}\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ （矩阵形式为  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ）。

其矩阵表示为泡利矩阵  $\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，作用后输出为：

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \hat{X}|\psi_{\text{in}}\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle \quad \left( \text{即} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \right)$$

不仅能将计算基态  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  互换，更能 **线性地交换任意叠加态中的两项概率幅**（例如

$$\frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\hat{X}} \frac{-i|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \Big), \text{ 并在变换过程中完整保留全局与相对相位信息。}$$

## 量子逻辑门与经典逻辑门的三大核心区别

### 1. 操作的可逆性 (Reversibility) :

- **量子门**：所有闭合量子系统的门操作均由幺正算符 ( $U^\dagger U = I$ ) 描述，天然无信息损失，数学上严格可逆（即每个量子门都可以通过作用其共轭转置门  $U^\dagger$  完美还原输入）。
- **经典门**：大多数多输入经典逻辑门（如 AND、OR、NAND）具有多对一的映射关系，无法仅凭输出反推输入，属于不可逆操作，伴随信息擦除与朗道尔能量耗散。

### 2. 状态空间的连续性与叠加态调控 (Superposition Handling) :

- **量子门**：定义在连续的复向量空间（布洛赫球表面），支持生成、旋转和干涉连续变化的叠加态（如 Hadamard 门可将确定态制备为等权叠加态  $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ ）。
- **经典门**：仅能在离散的二值布尔集合  $\{0, 1\}$  间进行离散逻辑映射，无法处理中间态。

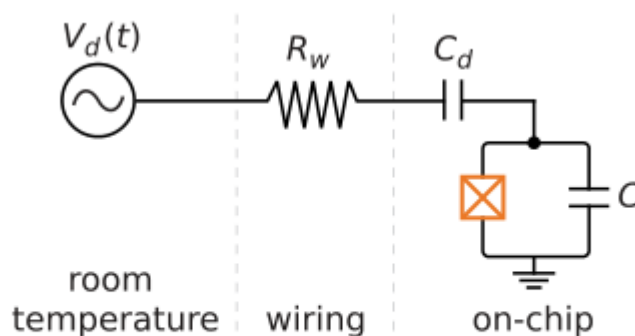
### 3. 通用门集合的构建 (Universality of Gate Sets) :

- **量子计算**：量子状态空间为连续流形，通用量子计算需要包含任意单比特连续旋转门 ( $SU(2)$ ) 加上至少一个双比特纠缠门（如 CNOT、CZ）构成的通用门集合（如 Clifford + T 门集），以覆盖整个多比特复合纠缠空间。
- **经典计算**：经典逻辑只需离散的通用逻辑门（如单独的 NAND 门或 NOR 门），即可通过简单级联组合出任意复杂的布尔函数。

## 2.5.4 单量子比特门操控

怎么操控单比特门？单比特控制的核心是 **微波脉冲通过电容耦合驱动量子比特旋转**。

### 2.5.4.1 微波控制



**FIG. 12.** Circuit diagram of capacitive coupling of a microwave drive line [characterized by a time-dependent voltage  $V_d(t)$ ] to a generic transmonlike superconducting qubit.

如何用微波脉冲控制超导量子比特的旋转？超导量子比特（如 transmon）主要靠微波脉冲控制，核心是微波驱动线和量子比特的电容耦合。

图 12 展示了典型的微波驱动线与 Transmon 量子比特之间的电容耦合控制电路。整个微波操控链路分为三个核心部分：

#### 1. 室温控制端 (Room Temperature) :

由任意波形发生器 (AWG) 与微波源合成时变微波电压信号  $V_d(t) = V_0(t) \cos(\omega_d t + \phi_d)$ 。其中，载波频率  $\omega_d$ 、包络幅度  $V_0(t)$  与初始相位  $\phi_d$  均可独立精确编程。

## 2. 低温传输布线 (Wiring) :

微波信号通过制冷机内部的同轴电缆下行传递至毫开尔文 (mK) 低温区，电路中的  $R_w$  代表同轴传输线的特征阻抗与衰减网络，起到阻抗匹配与滤除室温热噪声的作用。

## 3. 芯片端量子比特 (On-Chip Qubit) :

位于低温芯片上的 Transmon 量子比特 (由约瑟夫森结与分流电容  $C$  并联构成)，通过极小的弱驱动耦合电容  $C_d$  (通常  $C_d \ll C$ ) 接入微波控制线。

### 微波脉冲如何驱动量子比特在布洛赫球上旋转

#### 1. 驱动哈密顿量的引入 (能量注入) :

微波信号通过耦合电容  $C_d$  在量子比特极板上诱导时变感应电荷  $q_d(t) \approx C_d V_d(t)$ ，在系统哈密顿量中引入电荷驱动微扰项：

$$\hat{H}_d(t) \approx 2e \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t) \hat{n}$$

其中  $C_\Sigma = C + C_d$  为总对地电容， $\hat{n}$  为库珀对数算符。在二能级子空间近似下，该项可映射为泡利算符  $\hat{\sigma}_x$ 。

#### 2. 旋转轴的确定 (由微波相位 $\phi_d$ 决定) :

当微波频率与比特跃迁频率共振 ( $\omega_d = \omega_{01}$ ) 时，转换到随微波频率旋转的坐标系 (旋转波近似 RWA) 下，驱动哈密顿量简化为：

$$\hat{H}_{\text{RWA}} = \frac{\hbar \Omega_R(t)}{2} (\cos \phi_d \hat{\sigma}_x + \sin \phi_d \hat{\sigma}_y)$$

改变微波的相位  $\phi_d$ ，即可自由指定布洛赫球赤道面上的旋转轴 (如  $\phi_d = 0$  对应绕  $X$  轴旋转， $\phi_d = \pi/2$  对应绕  $Y$  轴旋转)。

#### 3. 旋转角度的确定 (由脉冲包络积分决定) :

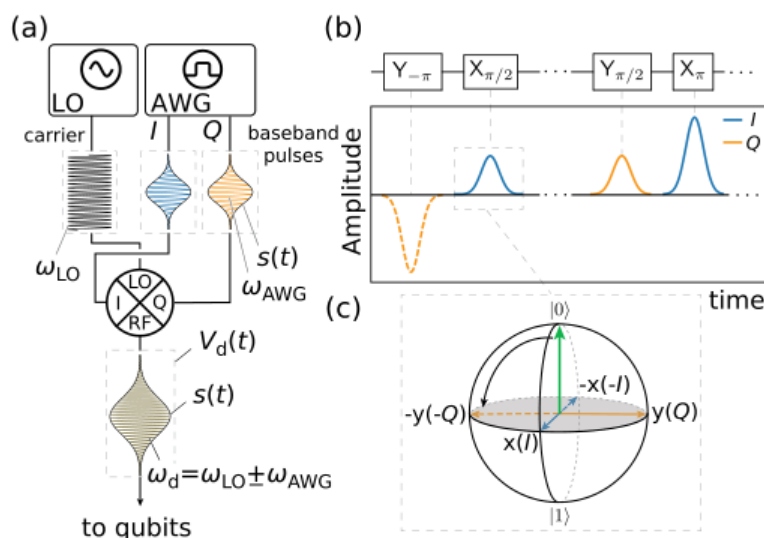
驱动强度 (拉比频率)  $\Omega_R(t) \propto V_0(t)$  与微波脉冲幅度成正比。比特在布洛赫球上的旋转角度  $\theta$  由脉冲包络的积分面积严格决定：

$$\theta = \int \Omega_R(t) dt$$

通过精确调制微波脉冲的宽度与幅度，即可实现任意角度的单比特量子逻辑门 (例如  $\theta = \pi$  对应将  $|0\rangle$  完全翻转为  $|1\rangle$  的  $X$  门， $\theta = \pi/2$  则制备等权叠加态)。

### 2.5.4.2 旋转的实现

怎么实现  $X$ 、 $Y$  方向的旋转？



**FIG. 13.** (a) Schematic of a typical qubit drive setup. A microwave source supplies a high-frequency signal ( $\omega_{LO}$ ), while an arbitrary waveform generator (AWG) supplies a pulse-envelope ( $s(t)$ ), sometimes with a low frequency component,  $\omega_{AWG}$ , generated by the AWG. The IQ-mixer combines the two signals to generate a shaped waveform  $V_d(t)$  with a frequency  $\omega_d = \omega_{LO} \pm \omega_{AWG}$ , typically resonant with the qubit. (b) Example of how a gate sequence is translated into a waveform generated by the AWG. Colors indicate the I and Q components. (c) The action of a  $X_{\pi/2}$  pulse on a  $|0\rangle$  state to produce the  $|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$  state.

- **图 13a 微波生成流程：**本地振荡器（LO）提供高频载波（如 5 GHz），任意波形发生器（AWG）生成脉冲包络（ $s(t)$ ，控制脉冲的形状和时长），两者通过 IQ 混频器组合，生成最终的微波脉冲  $V_d(t)$ （ $\omega_d = \omega_{LO} \pm \omega_{AWG}$ ），送到量子比特，驱动 X/Y 方向旋转。
- **图 13b 脉冲包络对应量子门：**比如要实现 X 门，AWG 生成 I 通道的脉冲；要实现 Y 门，生成 Q 通道的脉冲（I 和 Q 是微波的两个正交分量，对应 X 和 Y 轴）。
  - I 通道（同相）的脉冲对应 X 方向旋转；
  - Q 通道（正交）的脉冲对应 Y 方向旋转；
  - 脉冲时长决定旋转角度： $\pi$  脉冲对应  $180^\circ$  旋转， $\pi/2$  脉冲对应  $90^\circ$  旋转。
- **图 13c 具体例子：**一个  $X_{\pi/2}$  脉冲（绕 X 轴转  $90^\circ$ ）把  $|0\rangle$  态变成  $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$  态，在布洛赫球上从北极转到了赤道的西侧点。

### 3. 旋转坐标系

补充一下相关数学知识，即 **相互作用表象下的演化和旋转坐标系**。要理解我们发的波形是怎么影响量子比特的，必须得用公式推导了。

在什么都不干的时候，量子态会在布洛赫球上高速旋转，很难算，公式如下面本征能量公式。

$$\hat{H}_q = \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z$$

$H_q$  代表量子比特自己本身自带的哈密顿量，也叫本征哈密顿量； $\omega_q$  是量子态从 0 跃迁到 1 态的跃迁频率，这一项会让量子态绕 Z 轴疯狂旋转。不带帽子的  $\sigma$  只是普通数字矩阵，戴了之后就变成量子力学算符。也可以换一种理解：这个 Z 算符是下面这个东西，带进去  $E_0 = \hbar\omega/2$ 、 $E_1 = -\hbar\omega/2$ ，能级差刚好就是一个  $\hbar\omega$ 。

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**旋转坐标系：**这个相互作用表象其实就是旋转坐标系——我们的视角跟着量子态一起转，量子态就相当于静止了，好算多了。

施加的驱动同样可以把  $\omega$  消掉。

$$\hat{H}_d(t) = \hbar\Omega(t) \cos(\omega_q t + \varphi) \hat{\sigma}_x$$

旋转波近似下变成：

$$\hat{H}_{d,I} = \exp(iH_0 t/\hbar) \hat{H}_d \exp(-iH_0 t/\hbar) = \frac{\hbar\Omega(t)}{2} (\cos \varphi \hat{\sigma}_x + \sin \varphi \hat{\sigma}_y)$$

$H_d$  就是外界施加的微波的哈密顿量，仔细看确实少了一个  $\omega_q$ ，有用的就只有包络和波形相位了。可以发现，**相位决定了绕 XY 平面的哪一个轴旋转**： $\varphi = 0$  就是绕 X 轴转，等于  $\pi/2$  就是绕 Y 轴转，等于其他的就是绕 XY 平面的任意一条转轴旋转。轴定了，那么转多快、转多少角度呢？实际由包络决定。这个  $\Omega(t)$  就是拉比频率，也叫包络强度， $\Omega(t)$  对时间积分就是旋转角度。

频率、包络、相位我们都可控，因此可以决定绕 XY 平面上任意一个轴旋转多少度，也就能做拉比振荡实验了。**这个公式至关重要，直接对应了我们电子学的微波控制。**

任意一个旋转门可以表示成如下形式： $\gamma$  是旋转角度， $\varphi$  决定绕哪根 XY 平面的轴旋转， $-1/2i$  是什么不管记住就行。

$$R(\gamma, \varphi) = \exp\left[-\frac{1}{2}i\gamma(\cos \varphi \hat{\sigma}_x + \sin \varphi \hat{\sigma}_y)\right]$$

对于 Z 旋转的驱动，写成  $\hat{H}_d(t) = \frac{\hbar f(t)}{2} \hat{\sigma}_z$ ，这样  $\theta = \int f(t) dt$ ，变成矩阵形式：

$$P(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int \hat{H}_d(t) dt\right) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_z\right)$$

$$\exp\left(-i\frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_z\right) = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\theta}{2} \cdot 1\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\frac{\theta}{2} \cdot (-1)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

**旋转坐标系变换：**

$$|\psi\rangle_I = \exp(-i\omega_q t/2 \hat{\sigma}_z) |\psi\rangle_S$$

这个就是坐标系变换公式： $S$  是静止坐标系的态， $I$  是旋转坐标系下的态。绕 z 轴旋转因子被消掉了。在薛定谔表象下态带有随时间快速振荡的相位，换到旋转坐标系后变成：

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_S &= \alpha e^{i\omega_q t} |0\rangle + \beta e^{-i\omega_q t} |1\rangle \\ |\psi\rangle_I &= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \end{aligned}$$

## 2.5.5 虚拟 Z 门

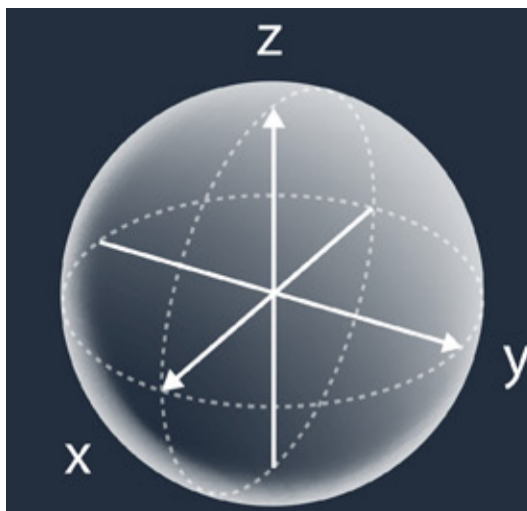
虚拟 Z 门是绕 z 轴的旋转。正常需要单独的微波脉冲，但虚拟 Z 门不用，它通过 **改变后续微波脉冲的相位** 来实现 Z 门的效果。

先给一个  $X_\theta$  脉冲（绕 X 轴转  $\theta$ ），再给一个相位偏移  $\pi/2$  的  $X_\theta$  脉冲，组合起来的效果就相当于 " $X_\theta + Z_\pi + X_\theta$ "，中间的  $Z_\pi$  就是虚拟 Z 门。好处：不占用额外时间、没有实际脉冲，能减少量子比特的 decoherence（退相干），提高控制效率。

李少伟博士论文里介绍了虚拟相位门的公式表示：

$$R(\gamma, \varphi)P(\theta) = P(\theta)R(\gamma, \varphi + \theta)$$

这个公式含义是：先绕 Z 旋转  $\theta$ ，再绕赤道  $\varphi$  转  $\gamma$  度，等价于先让它绕赤道面夹角为  $\varphi + \theta$  的轴旋转  $\gamma$ ，后补一个绕 Z 轴旋转  $\theta$ 。这个比较难想，要配图来想。我想了比较久，但是没想明白。**反正知道虚拟相位门就是不需要物理 Z 门了，用 XY 波形相位的改变来等效。**通过选取 XY 平面的轴，我们可以把量子态转到任意一个我们想要的相位。我们在意的是把量子态投到南北极，所以直接把这个  $P(\theta)$  省略掉，就不需要加了。



## 2.5.6 DRAG

DRAG 方案能解决能级泄漏问题。

超导量子比特是弱非谐振荡器，除了  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ ，还有  $|2\rangle$ 、 $|3\rangle$  等更高能级。如果微波脉冲的频率范围太宽，会不小心把  $|1\rangle$  态激发到  $|2\rangle$  态（这叫泄漏），导致量子计算出错。

图 14 分 a-g 七个子图，展示 DRAG 方案的原理与效果：

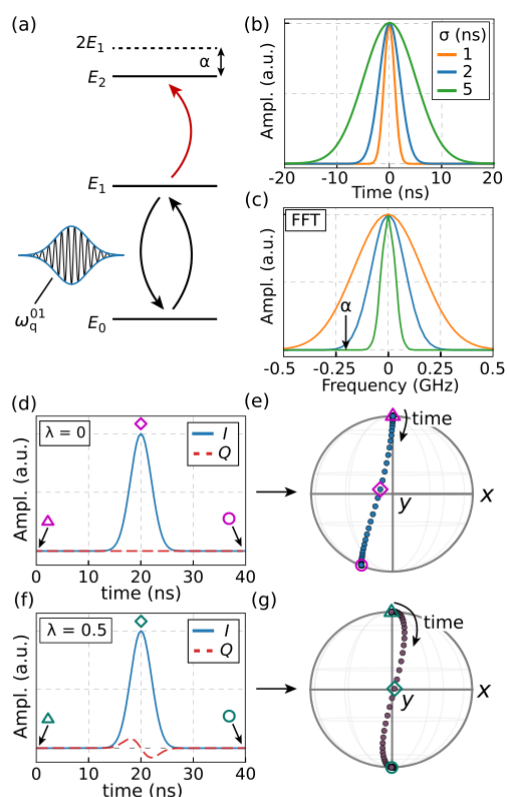


FIG. 14. (a) Schematic level diagram of a weakly anharmonic transmon qubit subjected to a drive at transition frequency  $\omega_d = \omega_q$ . (b) Gaussian waveform with standard deviation  $\sigma$ . (c) Fourier transform of (b) showing how the short pulse lengths lead to a significant overlap with the  $\omega_q^{-1-2}$  transition, separated from  $\omega_q$  by the anharmonicity  $\alpha$ . (d) Waveform of a  $X_\pi$  pulse without DRAG modulation. (e) Effect of the waveform from (d) on a qubit initialized in the  $|0\rangle$  state with  $\alpha = -200$  MHz and  $\omega_q = 4$  GHz. The dephasing error is visible as a deviation from the  $|1\rangle$  after the pulse. (f) Waveform of a  $X_\pi$  pulse with DRAG modulation for a qubit with anharmonicity  $\alpha = -200$  MHz and DRAG parameter  $\lambda = 0.5$  to cancel dephasing errors (see the text for details). (g) Effect of the waveform from (f) on the same qubit as (e). Calculated using mesolve in the software package QuTiP.

- 图 14a: transmon 量子比特的能级图， $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  的频率是  $\omega_q$ ， $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  的频率是  $\omega_q + \alpha$  ( $\alpha$  是负的，实际比  $\omega_q$  小 200 MHz)。

- 图 14b、c：普通高斯脉冲的频率范围宽（图 14b 为高斯脉冲图，横轴是时间），会覆盖  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  的频率（ $\omega_q + \alpha$ ）（图 14c 的 FFT 图，横轴是频率），导致泄漏。
- 图 14d、e：没有 DRAG 的  $X_\pi$  脉冲（图 14d），会让量子态偏离  $|1\rangle$ （图 14e，出现相位误差）。
- 图 14f、g：I 通道为高斯包络，Q 通道为其导数。加了 DRAG 的脉冲（图 14f，Q 通道加了脉冲的导数项），能抑制泄漏和相位误差，量子态准确停在  $|1\rangle$ （图 14g）。

波形修改规则： $s(t) \rightarrow \begin{cases} s(t) & \text{I通道} \\ \lambda \cdot \dot{s}(t)/\alpha & \text{Q通道} \end{cases}$ （ $\lambda$  为 scaling 参数，理论最优  $\lambda = 0.5$  用于减少相位误差， $\lambda = 1$  用于减少泄漏）。

DRAG 的原理是：通过修改脉冲的正交分量（Q 通道），加入脉冲包络的导数项，抵消更高能级的激发，让微波脉冲只作用于  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ ，不碰  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 。现在先进的单量子比特门，用 DRAG 后保真度能达到 99% 以上。

## 驱动与包络

$R(\pi/2, \varphi)$  门就是把 0 态转到赤道上的门。我们要得到它，要发怎么样的波形呢？首先不能发方波，因为方波有很多高频杂散信号，所以要发平滑的包络。常用的为  $\sin^2$  型包络，作用时间设为  $T_{\pi/2}$ ，这样就能转到对应的角度。理论上，只要幅度越大，作用时间就能越短。

$$\Omega(t) = \Omega_0 \sin^2\left(\pi \frac{t}{T_{\pi/2}}\right)$$

但是强大的微波会和  $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$  态发生近共振耦合，在量子力学中这会形成 **缀饰态 (Dressed States)**，缀饰能级会偏离原来的能级频率差，造成能级移动与相位误差。

$$2\pi \cdot \Delta f = \frac{\Omega^2}{2\eta}$$

还有一个问题是能级泄漏，就是被错误地激发到 2 态上面去了。

解决这两个问题就是用 DRAG 技术，这个大家都知道了，但是他这边给了具体公式：

$$\Omega'(t) = \left( \Omega(t) - i\alpha \frac{\dot{\Omega}(t)}{\eta} \right) e^{2\pi i \Delta f t}$$

微波信号是一个复数，包含同相和正交分量。我刚开始不太理解，波形怎么还有虚数的？似乎在现实世界压根没有虚数波形。然而，实际上加一个虚数，也就是换另一个端口（Q 端口）进去罢了：实数波形和虚数波形搭载  $90^\circ$  相位差的载波，直接加在一起输入进去。

原始包络是  $\Omega(t)$ ，在 I 通道；导数修正项是  $-i\alpha \frac{\dot{\Omega}(t)}{\eta}$ （在 Q 通道）。上面加一个点代表变化率。频率修正因子是  $e^{2\pi i \Delta f t}$ ，说是用来缀饰能级移动引起的动态相位误差。参数优化主要是优化  $\alpha$  就行。

## 他怎么确定 $\alpha$ 的呢？

先打一个  $X/2$  门，把比特从北极推到赤道，接着连续打很多个 I 门，最后再打一个  $X/2$  门，毫无误差的话，1 的概率就 100%。但实际中肯定有误差，越接近 1 越好，所以我们就要确定  $\alpha$  的值消除相位误差。

## 2.1.4 单比特门的波形修正

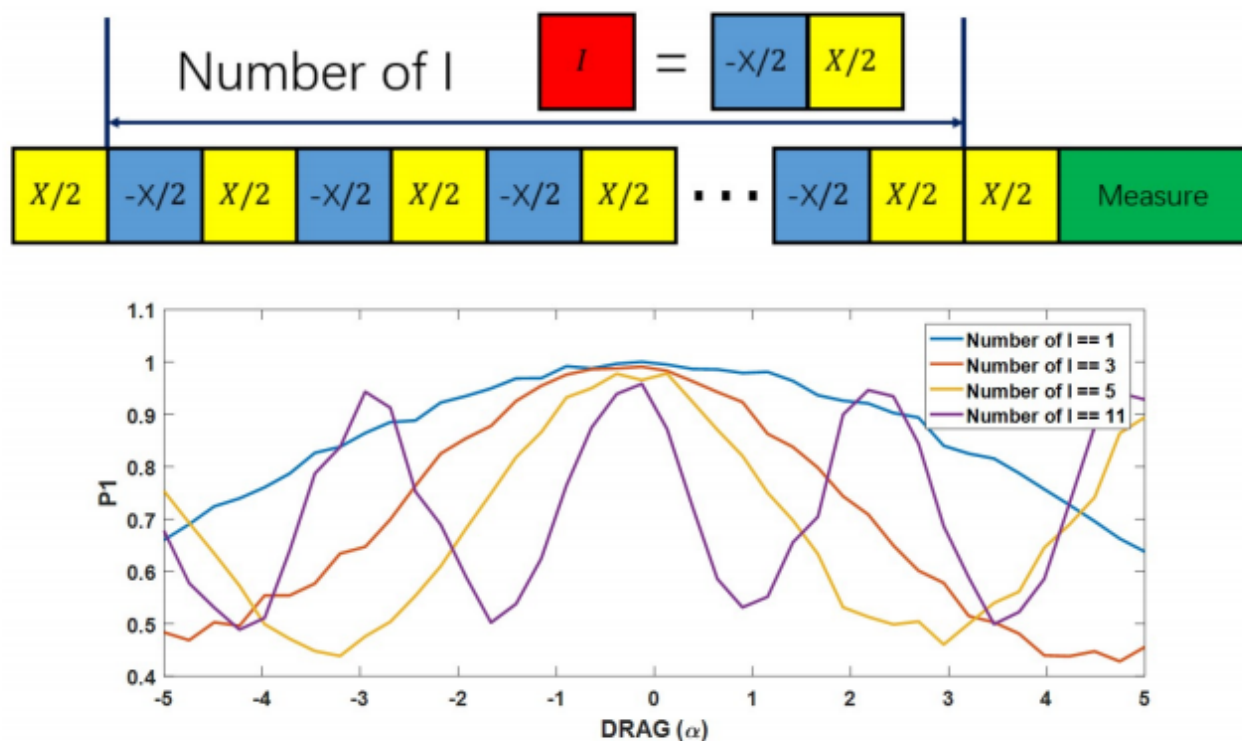


图 2.1 测试最优  $\alpha$  线路示意图与测试数据

这个图就是扫  $\alpha$ ，最高点就是最优的  $\alpha$  位置。

## 2.5.7 双比特门的实现

### 2.5.7.1 iSWAP 门

双量子比特门需要两个量子比特相互作用。可调谐量子比特（如 split transmon）可以通过调频率实现这种相互作用，iSWAP 门是其中一种常用的。

**iSWAP 门的核心：共振交换激发。**当两个量子比特的频率调到一致（共振）时，它们会通过电容耦合交换激发。如量子比特 1 在  $|1\rangle$ 、量子比特 2 在  $|0\rangle$ ，共振后会变成量子比特 1 在  $|0\rangle$ 、量子比特 2 在  $|1\rangle$ ，同时会加一个  $i$  的相位（所以叫 iSWAP）。

其中耦合强度  $g$  决定交换时间（ $g$  越大，交换越快），典型值是 5-40 MHz，交换时间约 50-200 ns。

注意，调频率时会量子比特离开磁通甜点（对磁通噪声不敏感的点），所以需要虚拟 Z 门消除调频率带来的额外相位。

图 15 直观展示了 iSWAP 的操作过程：

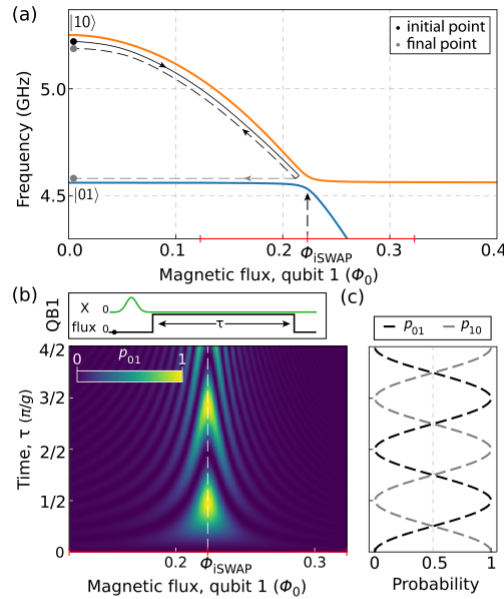


FIG. 15. (a) Spectrum of two transmon qubits (written in the combined basis as  $|QB1, QB2\rangle$ ) as the local flux through the loop of qubit 1 is increased. The black/dashed lines with arrows indicate a typical flux trajectory to demonstrate operation of  $i$ SWAP gate. (b) Probability of swapping into the  $|01\rangle$  state as a function of time and flux. The pulse sequence corresponds to preparing  $|10\rangle$  and performing a typical  $i$ SWAP operation (for a time  $\tau$ ). (c) Probabilities of  $|01\rangle$  (black) and  $|10\rangle$  (gray) at  $\Phi = \Phi_{iSWAP}$  [white dashed line in (b)] as the time spent at the operating point ( $\tau$ ) is increased. This simulation does not include any decay effects.

- 图 15a: 两个可调谐量子比特的能谱 (纵轴是频率, 横轴是量子比特 1 的磁通)。黑色虚线是操作轨迹: 先把量子比特 1 调到和量子比特 2 共振 ( $\Phi_{iSWAP}$  处), 让它们交换激发, 再调回原来的频率。

操作过程:

- 初始态: 量子比特 1 在  $|1\rangle$ 、量子比特 2 在  $|0\rangle$  (态  $|10\rangle$ ), 频率分别为  $\omega_{q1}$ 、 $\omega_{q2}$  (不共振);
  - 调磁通: 改变量子比特 1 的磁通, 使其频率接近  $\omega_{q2}$  (共振点  $\Phi_{iSWAP}$ );
  - 交换激发: 共振时两比特通过电容耦合交换能量,  $|10\rangle \rightarrow |01\rangle$ ;
  - 恢复频率: 调回磁通, 两比特脱离共振, 完成  $i$ SWAP 操作。
- 图 15b: 交换概率随时间和磁通的变化。在  $\Phi_{iSWAP}$  处概率会周期性波动 (右上角有个  $P_{01}$ , 代表 01 态的概率对应的颜色)。
  - 图 15c: 固定在  $\Phi_{iSWAP}$  处,  $|01\rangle$  和  $|10\rangle$  的概率随时间变化。每过  $\pi/(2g)$  时间 ( $g$  是耦合强度), 概率会从  $|01\rangle$  变成  $|10\rangle$ , 实现交换。

$$U_{iSWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

核心是交换  $|01\rangle$  与  $|10\rangle$  并加  $-i$  相位; 调频率过程中量子比特会积累额外相位  $\theta_z = \int (\omega_q - \omega(t)) dt$ , 需通过 "虚拟 Z 门" 抵消, 确保门操作纯净。两个  $i$ SWAP + 若干单比特门可组合实现 CNOT 门, 适合量子模拟, 目前已用于生成 10 比特 GHZ 纠缠态。

### 2.5.7.2 CPHASE 门

CPHASE 门比  $i$ SWAP 门更常用, 因为它的保真度最高 ( $\geq 0.994$ )、无需交换能量、能直接用于量子纠错。它利用量子比特的更高能级 (比如  $|20\rangle$ ) 实现条件相位。

**CPHASE 门的原理: 绝热相位积累**

只有当两个量子比特都在  $|1\rangle$  态 (即  $|11\rangle$ ) 时, 才会通过和  $|20\rangle$  的能级排斥获得  $\pi$  相位; 其他状态 ( $|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ ) 不受影响。

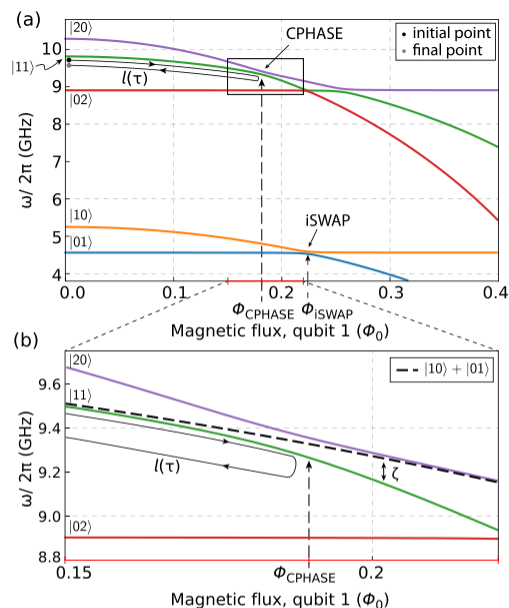


FIG. 16. (a) Spectrum of two coupled transmon qubits (using typical transmonlike values for Josephson energies and capacitances) as the local magnetic flux for qubit 1 is varied. The two lower branches corresponding to  $|01\rangle$  and  $|10\rangle$  are involved in the  $i$ SWAP gate operation at  $\Phi = \Phi_{\text{iSWAP}}$ . The avoided crossing indicated in the black rectangle is used to implement the conditional phase gate (CPHASE), at  $\Phi = \Phi_{\text{CPHASE}}$ . The black line with arrows indicates a typical trajectory used to implement a CPHASE gate (starting at the black circle and ending at the gray circle). (b) Zoom in of the  $|20\rangle \leftrightarrow |11\rangle$  avoided crossing highlighted in the black box in (a) at  $\Phi = \Phi_{\text{CPHASE}}$ . The parameter  $\zeta$  quantifies the difference in energy between  $|11\rangle$  and  $|01\rangle + |10\rangle$  and  $l(\tau)$  is the trajectory in  $(\Phi, t)$ -space.

图 16 的两图纵轴为频率, 横轴为量子比特 1 的磁通  $\Phi_{ext}$ 。

- **图 16a:** 包含更高能级 ( $|20\rangle$ ) 的能谱。方框里是  $|11\rangle$  和  $|20\rangle$  的能级交叉, 是 CPHASE 门的关键操作点 ( $\Phi_{CPHASE}$ )。  $|11\rangle$  与  $|20\rangle$  的能级因耦合产生排斥 (间距变大), 而  $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$  与高能级无耦合, 能级不变。
- **图 16b:** 放大红色方框区域, 展示  $|11\rangle$  和  $|20\rangle$  的能级排斥。通过缓慢移动量子比特 1 的磁通 (绝热过程), 让  $|11\rangle$  态靠近  $|20\rangle$  态但不激发到  $|20\rangle$ , 从而累积获得一个  $\pi$  的相位, 其他态无相位变化。

更高能级 ( $|20\rangle$ ) 是辅助, 不实际占用, 只是通过能级排斥给  $|11\rangle$  态加相位, 避免了  $i$ SWAP 门的频率调谐问题。

#### 过程:

1. 准备量子态 ( $|11\rangle$ 、 $|01\rangle$  等) ;
2. 绝热调整磁通至  $\Phi_{CPHASE}$ , 等待时间  $\tau$  使  $|11\rangle$  积累  $\pi$  相位;
3. 调回磁通, 用虚拟 Z 门抵消单比特额外相位;

4. 最终实现的门单位矩阵: 
$$U_{CPHASE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 仅 } |11\rangle \text{ 态加 } -1 \text{ 相位。}$$

#### 优势:

1. 保真度高: 现在能达到 99.44% 以上, 超过量子纠错表面码的容错阈值 (99%), 是大规模量子计算的核心门;
2. 可直接用于量子纠错: 表面码量子纠错需要高保真的 CPHASE 门, 目前已经用它实现了 5 比特 GHZ 态 (一种多量子比特纠缠态)、5 比特重复码、模拟 Hubbard 模型。

### 2.5.7.3 CR 门

可调谐量子比特的门需要调磁通，会引入磁通噪声；而全微波门不用调频率，适合固定频率量子比特，更稳定。

**CR 门（交叉共振门）是固定频率量子比特的核心门（图 17），也是目前应用最广的微波门。**

**CR 门的原理：**通过交叉共振驱动——驱动一个量子比特的频率等于另一个的频率，让驱动信号同时影响两个量子比特，实现“量子比特 1 的状态控制量子比特 2 的旋转”。实现的效果为：比如量子比特 1 为  $|1\rangle$  时，量子比特 2 绕 X 轴转  $\pi$ ；量子比特 1 为  $|0\rangle$  时，量子比特 2 不转。

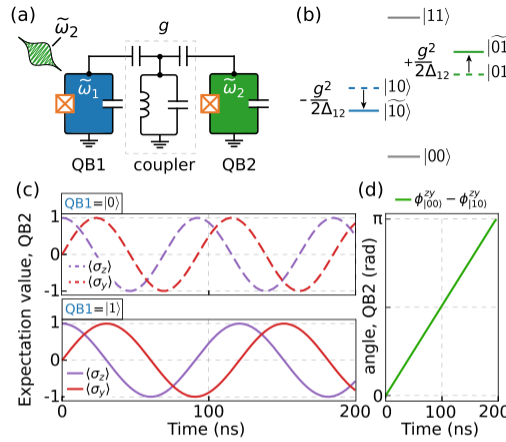


FIG. 17. (a) Schematic circuit diagram of two fixed frequency transmons coupled through a resonator yielding an overall coupling coefficient  $g$ . Qubit 1 driven at the frequency of qubit 2 leads to the CR gate. (b) Schematic level diagram of the always-on coupling leading to dressed states  $|01\rangle$  and  $|10\rangle$  with  $\Delta_{12} = \omega_1 - \omega_2$ . (c) Simulations of the expectation values of  $\langle \sigma_z \rangle$  and  $\langle \sigma_y \rangle$  for qubit 2 as a drive at the frequency of qubit 2 is applied to qubit 1. The upper panel shows regular Rabi oscillations when qubit 1 is in the  $|0\rangle$  state. The bottom panel shows a modified Rabi frequency when qubit 1 is in  $|1\rangle$  state, in accordance with Eq. (134). (d) Difference in angle in the  $(z, y)$  plane as a function of length of the applied drive to qubit 1. At approximately 200 ns, a  $\pi$ -phase shift has been acquired.

- 图 17a：两个固定频率量子比特 QB1 和 QB2，通过线性谐振器耦合（不调频率），驱动量子比特 1 的微波频率等于量子比特 2 的频率（ $\omega_{q1} = \omega_{q2}$ ）。
- 图 17b：能级图，QB1 与 QB2 的能级因耦合产生能级分裂，驱动 QB1 的微波会通过耦合间接影响 QB2 的状态。
- 图 17c：量子比特 2 的概率随时间变化图。如果量子比特 1 在  $|0\rangle$ ，量子比特 2 做普通 Rabi 振荡；如果量子比特 1 在  $|1\rangle$ ，振荡频率会变。这是条件振荡，是 CR 门的纠缠源：
  - 上图（QB1 为  $|0\rangle$ ）：QB2 做普通 Rabi 振荡（频率  $\Omega_0$ ）；
  - 下图（QB1 为  $|1\rangle$ ）：QB2 的振荡频率变为  $\Omega_1$ （ $\Omega_1 \neq \Omega_0$ ）。
- 图 17d：横轴为“驱动时间”，纵轴为“QB2 在  $(z, y)$  平面的角度差”。相位差随时间变化，约 200 ns 时相位差达到  $\pi$ ，实现 CR 门。 $U_{CR_\pi} = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z \otimes \sigma_x}$ 。

## 2. CR 门的改进与应用

改进方案：

- echo-CR**：加  $\pi$  脉冲抵消 ac-Stark 移位（驱动导致的比特频率偏移），保真度提升至 0.93；
- aceCR**（主动抵消 echo-CR）：加额外抵消脉冲，保真度提升至 0.991。

应用：固定频率比特的核心门；用于量子纠错（4 比特贝尔态错误检测）、量子机器学习（学习奇偶性问题）、分子能量计算（VQE 算法计算  $H_2$ 、LiH 能量）。

## 3. 其他仅微波控制门

bSWAP、MAP 和 RIP 其他微波门：

- **bSWAP 门**: 利用  $|00\rangle$  和  $|11\rangle$  态的跃迁 (通过更高能级辅助) 直接产生纠缠, 适合模拟自旋系统。
- **MAP 门**: 让量子比特的更高能级 (比如  $|12\rangle$  和  $|03\rangle$ ) 共振, 通过微波驱动产生条件相位, 缺点是需要精确匹配更高能级的频率。
- **RIP 门**: 两个量子比特耦合到同一个共振腔, 通过给腔加微波脉冲, 让量子比特获得状态依赖的相位, 适合频率差异大的量子比特。

#### 2.5.7.4 CZ 门

CZ 门可以看李少炜博士的博士论文。他说他 19 年实现的非绝热 CZ 门保持着当时保真度最高的记录, 相当牛。

表 2.1 近年双比特门的发展

| 年代   | 单位                      | 量子门方案       | 保真度    |
|------|-------------------------|-------------|--------|
| 2014 | 谷歌-UCSB <sup>[32]</sup> | 绝热 CZ 门     | 99.44% |
| 2016 | IBM <sup>[49]</sup>     | 交叉共振 CNOT 门 | 99.1%  |
| 2016 | 中科大-浙大 <sup>[50]</sup>  | 腔诱导相位 CZ 门  | 93.6%  |
| 2019 | 中科大 <sup>[29]</sup>     | 非绝热 CZ 门    | 99.54% |
| 2020 | Delft <sup>[34]</sup>   | 非绝热 CZ 门    | 99.80% |
| 2020 | 谷歌-UCSB <sup>[28]</sup> | 耦合器 CZ 门    | 99.62% |
| 2020 | 南方科大 <sup>[30]</sup>    | 非绝热 CZ 门    | 99.5%  |

这里的量子门还分什么绝热、不绝热、交叉共振啥的, 而且还有什么 CZ、CNOT 之类的。**C 代表 controlled, 受控的意思。**

- CNOT 是受控非门; CZ 是受控 Z 相位门。都有一个控制比特: CNOT 控制比特为 1 才翻转目标比特, 不然不翻转; CZ 是要为 11 才给这个态加相位。所以带 C 字的都是双比特门, 因为有控制和受控。

那绝热 CZ、非绝热 CZ、耦合器 CZ 又是什么呢? 绝热/非绝热直接耦合, 没有中间耦合器; 耦合器 CZ 中间有一个中间耦合器来开关耦合。绝热/非绝热中, 绝热是慢慢拉动比特频率, 不会跳到 2 态; 非绝热的话非常急, 会短暂脱离本征态, 但门快得多。

### 2.5.8 可调耦合的门

为了解决 "固定耦合太弱" 和 "可调谐量子比特噪声大" 的问题, 又发展出了可调耦合技术: 在两个量子比特之间加一个可调耦合器 (flux-tunable SQUID), 通过调耦合器的参数控制两个量子比特的相互作用强度。

两种方式:

1. **调耦合强度  $g$** : 通过磁通改变耦合器的临界电流, 让  $g$  随时间变化;
2. **调耦合器的频率**: 让耦合器的频率在两个量子比特频率之间切换, 实现需要时耦合、不需要时断开。

**优势**: 耦合的开关比高, 能达到 1000 倍, 减少闲置时的串扰; 门保真度高, 比如用可调耦合器实现的 iSWAP 门, 保真度能达到 98.2%。

### 2.5.9 双比特门公式推导

CNOT 门和 CZ 门矩阵表达要知道一下。这李少炜博士论文中介绍了 **XX 耦合的 CNOT 和 ZZ 耦合的 CZ 门**。公式可以看李少炜博士论文的第二章的 2.5 小节。

两个比特之间如果有一个电容, 就会有静电作用。数学表示就是交叉项  $(\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i) \otimes (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j)$ 。

#### 产生和湮灭算符

量子化的 LC 电路, 电压就是用产生算符和湮灭算符表示的。产生算符和湮灭算符是狄拉克发明的, 用来快速计算、简洁表示的算符。有  $+$  的是产生算符, 代表上台阶;  $\hat{a}$  是湮灭算符, 代表下台阶。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{ip}{m\omega} \right) \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

就是对哈密顿量公式强行因式分解  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  得到的。把产生算符和湮灭算符相加一下，可以解出  $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ 。可以发现量子世界中位置是由 "上楼梯加下楼梯" 两个动作趋势共同组成的结果。

**对易关系：** $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ，也就是说  $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ 。"先上楼再下楼" 的结果，比 "先下楼再上楼" 刚好大 1。

$\sigma_x$  对 3 层做截断，可以得到：

$$\hat{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{看高楼层定系数})$$

**泡利算符：**泡利算符针对二能级系统设计。 $x$  叫翻转算符，定义动作是 0 到 1、1 到 0； $z$  叫相位算符，给 1 态加一个  $\pi$  相位，不改变 0、1 概率； $y$  算符用得比较少，叫复数翻转算符，翻转的同时还顺手乘上了一个虚数单位  $i$ （翻转还改变相位）。这三个算符有点像 XYZ 坐标系的 3 个基向量，可以表示任何操作。

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hat{a}^\dagger + \hat{a}$  这个东西的定义正好对应泡利算符  $\hat{\sigma}_x$ 。为什么呢，因为  $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|0\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle + \hat{a}|0\rangle = |1\rangle + 0 = |1\rangle$ ；如果作用在 1 上，就是  $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|1\rangle = \hat{a}^\dagger|1\rangle + \hat{a}|1\rangle = 0 + |0\rangle = |0\rangle$ ，变成 0 和  $\sigma_x$  效果一样。

**张量积：**就是为了在量子力学中把两个独立的东西联系起来，物理学家用  $\otimes$  代替。算符的张量积  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  的含义是：**前面的算符  $\hat{A}$  仅仅作用于 1 号比特，后面的算符  $\hat{B}$  仅仅作用于 2 号比特，两者同时发生。**

**光子空间：**单光子空间就是  $|10\rangle$  或  $|01\rangle$ ，只有一个光子；双光子空间指两个比特手里 **一共有 2 份能量**，比如  $|11\rangle$ 、 $|02\rangle$ 、 $|20\rangle$ 。

## 2.6 量子比特读出

**内容速览：**色散读出原理，Purcell 滤波器抑制自发辐射，约瑟夫森参量放大器 (JPA) / 行波参量放大器 (TWPA) 提升信噪比至量子极限。

量子比特的状态 ( $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ ) 没法直接观测，需要通过专门的读出技术把量子状态转换成经典电信号。

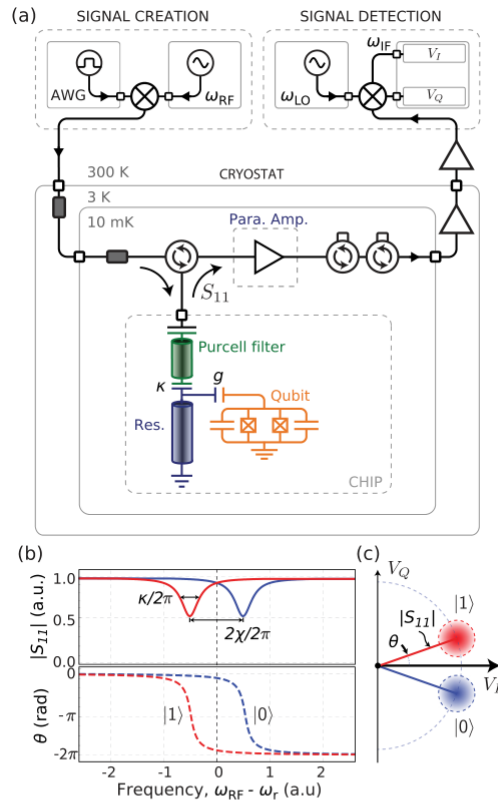
### 2.6.1 色散读出

要读量子比特状态，最常用的方法是色散读出：让量子比特和一个读出谐振器（一个微波共振腔）耦合，量子比特的状态会改变谐振器的频率，我们通过测量谐振器的频率偏移，就能反推量子比特是  $|0\rangle$  还是  $|1\rangle$ 。

#### 1. 为什么要用谐振器？

量子比特太脆弱了，直接测量会让它的量子态消失、发生退相干。而谐振器是一个中间器件：量子比特先和谐振器通过电容/电感耦合，改变谐振器频率，再测量谐振器的频率，既能获取量子比特状态，又能减少对量子比特的直接干扰（量子非破坏测量，QND）。

#### 2. 读出实例



**FIG. 19.** (a) Simplified schematic of a representative experimental setup used for dispersive qubit readout. The resonator probe tone is generated, shaped and timed using an arbitrary waveform generator (AWG), and sent down into the cryostat. The reflected signal  $S_{11}$  is amplified, first in a parametric amplifier and then in a low-noise HEMT amplifier, before it is downconverted using heterodyne mixing and finally sampled in a digitizer. (b) Reflected magnitude  $|S_{11}|$  and phase  $\theta$  response of the resonator with linewidth  $\kappa$ , when the qubit is in its ground state  $|0\rangle$  (blue) and excited state  $|1\rangle$  (red), separated with a frequency  $2\chi/2\pi$ . (c) Corresponding complex plane representation, where each point is composed of the in-plane  $\text{Re}[S_{11}]$  and quadrature  $\text{Im}[S_{11}]$  components. The highest state discrimination is obtained when probing the resonator just in-between the two resonances, [dashed line in (b)], thus maximizing the distance between the states.

- **图 19a 实验装置示意图**（信号从产生到检测的全流程）：左边，室温下任意波形发生器（AWG）产生探测微波脉冲，通过线路送到低温区；中下，低温环境下探测脉冲先经过 Purcell 滤波器（保护量子比特），再送到芯片上的读出谐振器和量子比特（橙色）；右边，信号检测系统——谐振器反射的信号先经过参数放大器（放大微弱信号），再经过普通放大器（HEMT），最后通过外差混频把高频信号转成低频并数字化，变成电脑能处理的 I/Q 信号。这个装置的作用是产生探测信号、让信号和量子比特与谐振器作用，最后把反射信号放大并转换成可测量的经典信号。
- **图 19b 谐振器的频率偏移**：横轴是探测信号频率（ $\omega_{RF}$ ），纵轴是反射信号的幅度（ $|S_{11}|$ ）和相位（下边的虚线）。蓝色曲线：量子比特在  $|0\rangle$  态时，谐振器的共振频率是  $\omega_r^{(0)}$ ，幅度最低处共振吸收最强；红色曲线：量子比特在  $|1\rangle$  态时，谐振器的共振频率会偏移一个小量（ $2\chi/2\pi$ ， $\chi$  是色散移位，典型值 1-10 MHz），变成  $\omega_r^{(1)}$ 。我们把探测信号的频率设在  $\omega_r^{(0)}$  和  $\omega_r^{(1)}$  中间（图中虚线处），这时  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  态对应的反射相位差最大，最容易区分。
- **图 19c I-Q 平面的状态区分**：告诉我们最终怎么判断量子态。横轴是同相分量 I，纵轴是正交分量 Q。蓝色点是量子比特在  $|0\rangle$  态时反射信号对应的 I/Q 值（因噪声略有扩散，形成高斯分布）；红色点是量子比特在  $|1\rangle$  态时对应的 I/Q 值。为什么能区分？因为  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  态让谐振器频率偏移，导致反射信号的相位不同，反映在 I-Q 平面就是两个分开的点群。电脑只要看信号落在哪个点群，就知道量子比特是  $|0\rangle$  还是  $|1\rangle$ 。

### 3. 色散读出的细节

- 为什么叫色散？因为量子比特的状态像光的色散现象一样，让谐振器的频率分开。
- 量子非破坏（QND）：只要探测信号的光子数不多，谐振器和量子比特之间不会交换能量，只会互相推频率，量子比特的状态不会被破坏，能重复测量。

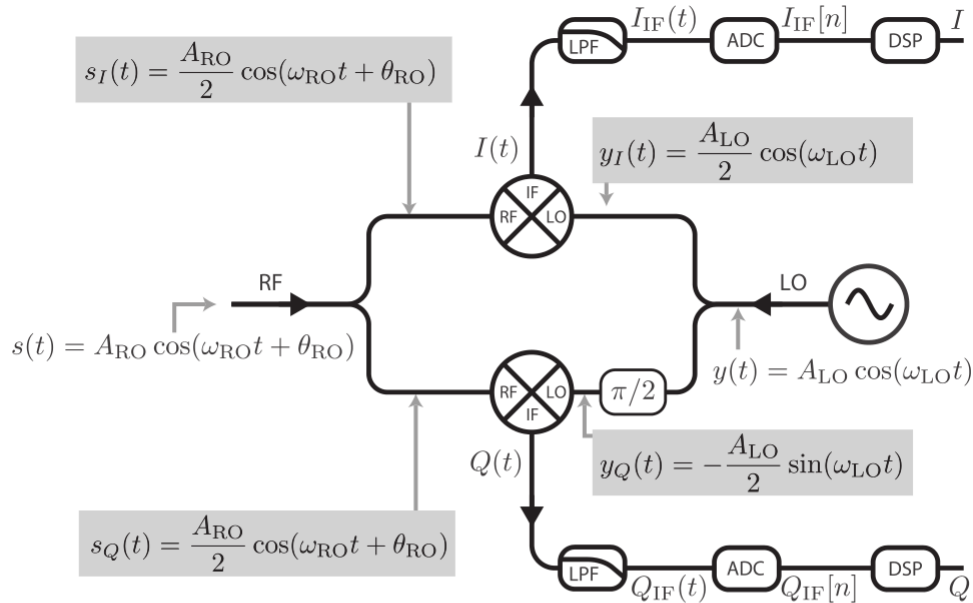
- 如果探测信号太强、光子数太多，会导致 "ac-Stark 移位"，让量子比特退相干，所以要控制探测信号的强度。

## 2.6.2 谐振器的幅度和相位的测量

知道了通过谐振器频率反推量子态，下一步是怎么精确测量谐振器的幅度和相位。这需要用到的微波信号处理技术，核心技术是 I-Q 混频和外差解调。

### 2.6.2.1 I-Q 混频

I-Q 混频把微波信号拆成两个分量进行分析。



**FIG. 21.** Schematic of an I-Q mixer. A readout pulse at frequency  $\omega_{RO}$  enters the RF port, where it is equally split into two paths. A local oscillator at frequency  $\omega_{LO}$  enters the LO port, where it is equally split into two paths, one of which undergoes a  $\pi/2$ -radian phase rotation. To perform analog modulation, the two signals in each path are multiplied at a mixer, yielding the outputs  $I(t)$  and  $Q(t)$ , each having frequencies  $\omega_{RO} \pm \omega_{LO}$ .  $I(t)$  and  $Q(t)$  are then low-pass-filtered (time averaged) to yield  $I_{IF}(t)$  and  $Q_{IF}(t)$  at the intermediate frequency  $\omega_{IF} = |\omega_{RO} - \omega_{LO}|$ , and subsequently digitized using an analog-to-digital (ADC) converter. If  $\omega_{IF} \neq 0$ , then digital signals  $I_{IF}[n]$  and  $Q_{IF}[n]$  are further digitally demodulated using digital signal processing (DSP) techniques to extract the amplitude and phase of the readout signal.

两个关键信号进入混频器：

1. **RF 信号**：从谐振器反射回来的信号，包含量子比特状态信息，典型 5-10 GHz，频率  $\omega_{RO}$ ；
2. **LO 信号**：本地振荡器产生的参考信号（频率  $\omega_{LO}$ ，和 RF 的  $\omega_{RO}$  频率接近，典型 10-100 MHz）。

混频器的操作：

1. 把 RF 信号分成两路（I 路和 Q 路）；
2. 把 LO 信号也分成两路：I 路 LO 保持原相位，Q 路 LO 加一个  $\pi/2$  相位（如果原 LO 是余弦信号，就变成正弦信号了）；
3. 两路分别相乘：I 路 RF  $\times$  I 路 LO，Q 路 RF  $\times$  Q 路 LO；
4. 输出信号：相乘后会产生和频（ $\omega_{RO} + \omega_{LO}$ ）和差频（ $\omega_{RO} - \omega_{LO}$ ，叫中频 IF），再通过低通滤波器滤掉和频，只保留中频信号（ $I_{IF}$  和  $Q_{IF}$ ），这两个信号频率低，容易数字化；

5. 送入电脑：I 通道中频信号和 Q 通道中频信号 ( $I_{IF}$  和  $Q_{IF}$ ) 频率低，可直接用 ADC 采样。

把 RF 信号比作带着密码的高频电波，LO 信号比作解码钥匙。混频器用钥匙把高频密码解成低频密码 ( $I_{IF}$  和  $Q_{IF}$ )，方便后续处理。

**具体过程为：**测试芯片一般会发一个高频微波（这个微波由两个低频信号 (IQ) 加高频微波源混频而成），衰减后送给量子芯片。传输线另一端会收到反射信号，下变频后用 AD 采集，然后在 FPGA 内部用下面公式得到 IQ 点（解模公式）：

$$I_{\text{probe}} = \sum_i \cos(\omega_{\text{sb}} t_i) \cdot W_{\text{probe}}(t_i)$$

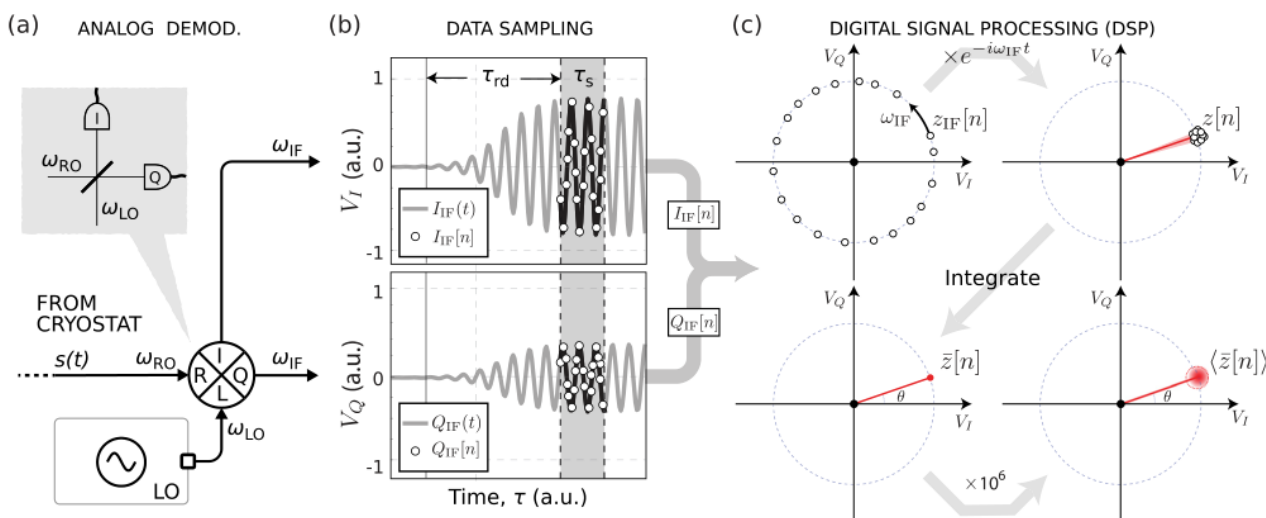
$$Q_{\text{probe}} = \sum_i \sin(\omega_{\text{sb}} t_i) \cdot W_{\text{probe}}(t_i)$$

只有特定频率的会共振筛选，其他频率的正负求和消除掉。 $I$  值代表了 **原波形中到底含有多少  $\omega_{\text{sb}}$  频率的成分**。

通过这个 IQ 平面，我们可以知道幅度  $A = \sqrt{I^2 + Q^2}$  和相位  $\theta = \arctan(Q/I)$ 。

### 2.6.2.2 外差解调

从低频信号中提取量子态。三步骤流程（a - 模拟解调，b - 数据采样，c - 数字处理）：



**FIG. 22.** Schematic of the heterodyne detection technique. (a) The signal with frequency  $\omega_{\text{RF}}$  from the cryostat is mixed with a carrier tone with frequency  $\omega_{\text{LO}}$ , yielding two quadratures at a down-converted intermediate frequency  $\omega_{\text{IF}} = |\omega_{\text{RF}} - \omega_{\text{LO}}|$ , and  $90^\circ$  out-of-phase with each other. (b) The two signals are passed into two different analog-to-digital converter (ADC) channels. To avoid sampling the resonator transient, some readout delay ( $\tau_{\text{rd}}$ ) corresponding to the resonator linewidth may be added, and the two signals are sampled for a time  $\tau_s$ . In this case, the white dots represent the sampled points. (c) The sampled traces are postprocessed and after some algebra, the sampled data points are averaged into a single point in the ( $I$ ,  $Q$ )-plane. To extract statistics of the readout performance, i.e., single-shot readout fidelity, a large number of ( $I$ ,  $Q$ )-records are acquired, yielding a 2D-histogram, with a Gaussian distributed spread given by the noise acting on the signal.

- **图 22a 模拟解调（把高频 RF 转成中频 IF）：**流程和图 21 一致——RF 信号（来自低温箱）和 LO 信号混合，输出  $I_{IF}$  和  $Q_{IF}$ （中频，一般几百 MHz）。作用是把难以处理的高频微波信号（GHz 级别）转成低频信号，用普通 ADC（模拟-数字转换器）采样。
- **图 22b 数据采样（把模拟信号变成数字信号）：**横轴是时间，纵轴是信号幅度。曲线是  $I_{IF}$  和  $Q_{IF}$  的模拟信号（随时间振荡）；白色圆点是 ADC 的采样点。不是全程采样，要避开刚加脉冲时的振铃，等谐振器稳定后在一段时间窗口内采样。为什么要等稳定？刚加探测脉冲时谐振器的信号还在波动，没达到稳定共振状态，采样会有误差；等波动消失后采样，数据更准。
- **图 22c 数字信号处理（最终确定量子态）：**第一步，把采样得到的数字信号 ( $I_{IF}[n]$ 、 $Q_{IF}[n]$ ) 和数字参考信号（和 LO 同频率的余弦/正弦信号）相乘再平均，这一步会把中频信号转成 DC（直流）信号，得到一个  $I$  值和一个  $Q$  值；第二步，把多次测量的  $I/Q$  值画在  $I$ - $Q$  平面，形成两个聚类（图 19c）；第三步，电脑用阈值区分聚类，就能判断每次测量的量子态。

### 2.6.2.3 两种解调方式比较

外差 vs homodyne（零差），常用外差法（不深究了）。

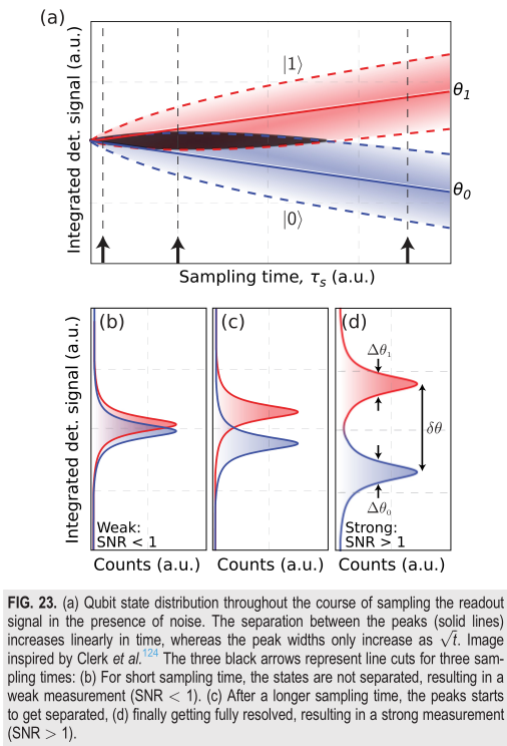
| 解调方式        | 原理                    | 优势                                                | 劣势                                      | 应用场景                  |
|-------------|-----------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------|
| 外差解调        | LO 与 RO 有中频差 (IF > 0) | 1. 抗低频噪声 (避免 1/f 噪声) ; 2. 支持频率复用 (多比特用不同 IF, 无干扰) | 电路复杂 (需额外处理 IF 信号)                      | 多量子比特读出 (如 10+ 比特处理器) |
| Homodyne 解调 | LO 与 RO 频率相同 (IF = 0) | 电路简单 (直接输出 DC 信号)                                 | 1. 易受低频噪声影响; 2. 无法复用 (多比特信号均为 DC, 无法区分) | 单量子比特测试 (如 qubit 校准)  |

外差解调：LO 频率和 RF 频率有一个小差值（中频 IF），适合同时读多个量子比特（每个量子比特对应不同的 IF，不会互相干扰）；Homodyne 解调：LO 频率和 RF 频率完全相同，输出是 DC 信号，但容易受低频噪声影响，且不能同时读多个量子比特。

### 2.6.3 弱测量 vs 强测量

量子读出很怕噪声。环境中的随机波动会让 I-Q 平面的点群扩散，如果扩散太厉害， $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的点会重叠，就没法区分状态了。

#### 1. 采样时间决定测量强度



- 图 23a 状态分离随时间的变化：**横轴是采样时间，纵轴是 I-Q 平面上  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的距离（分离度）。实线： $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的分离度随时间  $T_s$  线性增加，采样时间越长，积累的状态信息越多，分离越开；虚线：点群的扩散程度（噪声导致）随时间的平方根  $\sqrt{T_s}$  增加，噪声是随机的，积累速度比信号慢。随着采样时间增加，分离度会超过扩散程度，测量准确度从弱变强。
- 图 23b 弱测量（采样时间短， $\text{SNR} < 1$ ）：**蓝色/红色曲线代表  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的信号分布，几乎重叠，没法区分。为什么叫弱测量？因为采样时间太短，获取的状态信息太少，噪声掩盖了信号，信噪比  $\text{SNR} < 1$ ，只能知道量子态的部分信息（例如：可能是  $|0\rangle$ ，但不确定）。
- 图 23c 过渡状态（采样时间中等）：** $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的分布开始分开，但还有部分重叠，能大致判断状态，但偶尔会出错。

- **图 23d 强测量（采样时间足够长， $SNR > 1$ ）：** $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的分布完全分开，几乎没有重叠，能明确判断量子态，出错率很低。为什么叫强？采样时间足够长，信号超过噪声（ $SNR > 1$ ），能获取量子态的完整信息，测量后量子态会坍缩到  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ ，不会再是叠加态。

## 2. 单次读出 (Single-shot readout)

定义：一次测量就能准确判断量子态，不用重复测，这是量子计算的基本要求（如果每次都要重复测，效率太低）。怎么实现？需要足够高的信噪比， $SNR \geq 2$ （信号分离度至少是噪声扩散度的 2 倍）。这就需要后面讲的参数放大器（放大信号）和 Purcell 滤波器（减少噪声）。

## 3. 噪声的来源

- 量子噪声：微波光子的固有波动（量子力学允许的最小噪声  $\hbar\omega/2$ ）；
- 经典噪声：放大器的热噪声（HEMT 放大器约 2K 噪声温度）、线路的电磁干扰、制冷机振动等。

怎么量化噪声？用系统噪声温度量化。一般来说温度越低，噪声越少。公式为  $T_{sys} = T_{N1} + \frac{T_{N2}}{G_1} + \frac{T_{N3}}{G_1 G_2} + \dots$ （ $T_{N1}$  为第一级放大器噪声温度， $G_1$  为其增益）。第一级放大器的噪声起主导作用（参数放大器  $T_{sys}$  接近量子极限，约 0.1 K）。

## 4. 读出保真度计算

- **分离误差  $\epsilon_{sep}$** ：因噪声导致的误判概率，公式为  $\epsilon_{sep} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{SNR}{2}\right)$ （erfc 为互补误差函数）；
- **总保真度  $F$** ：需考虑量子比特退相干（读出时间  $\tau_{ro}$  内  $|1\rangle$  态可能弛豫到  $|0\rangle$ ），公式为  $F = 1 - \epsilon_{sep} - e^{-\tau_{ro}/T_1}$ （ $T_1$  为量子比特能量弛豫时间）；
- **目标**：单次读出保真度需  $\geq 0.99$ ，之后方便用纠错码。

## 2.7 Purcell 滤波器

读出系统有个矛盾：读得越快，就得让谐振器的带宽宽一点，但带宽太宽会让量子比特更快退相干，这就是 Purcell 效应。打个比方：量子比特像一个装满水的杯子，谐振器像管子，管子越粗（带宽越宽），水漏得越快（量子比特能量丢得越快）。

### 2.7.1 Purcell 效应

如果量子比特和环境之间有通路（例如量子比特和周围的  $50\Omega$  传输线之间接了个谐振器），量子比特的能量会通过这个通路快速辐射到环境中，导致退相干（ $T_1$  时间变短）。

### 2.7.2 Purcell 滤波器效果

从无保护到完美保护的示意图：

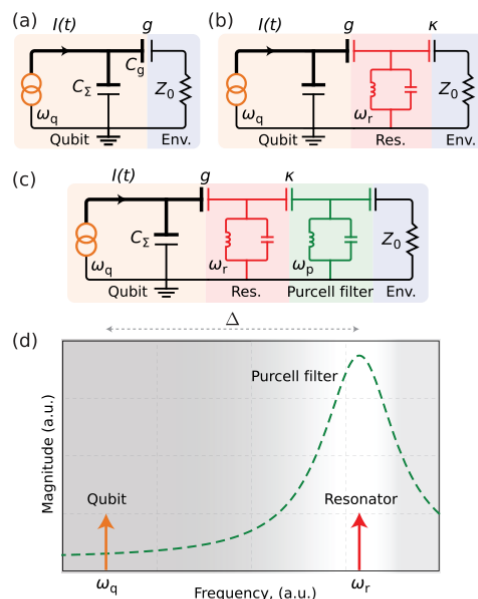


FIG. 24. (a) Circuit representation of the qubit (orange) coupled to an environment (blue) with a load resistor,  $Z_0$ , via a capacitor  $C_g$ . To study the decay rate, the Josephson junction has been replaced with a current source,  $I(t)$ . (b) By adding a resonator (red) with frequency  $\omega_r$  in-between the qubit and the  $50\ \Omega$  environment, we get the case found in a regular dispersive readout. (c) A Purcell-filter (green) is added to the circuit, providing protection for the qubit, while allowing the resonator field to decay fast in the environment. (d) Transmission spectrum of a Purcell filter (dashed green), centered around the resonator frequency (red arrow), whereas the qubit frequency (orange arrow) is far detuned.

- **图 24a 没有保护的情况：**量子比特（橙色圈）通过电容  $C_g$  直接连到环境（蓝色 env,  $Z_0 = 50\Omega$  电阻）。量子比特的能量会通过  $C_g$  直接辐射到环境，退相干快；同时读出信号也能传出去，但代价是量子比特不稳定。
- **图 24b 加了谐振器的情况：**在量子比特和环境之间加一个谐振器（红色 Res.）。谐振器在自己的频率 ( $\omega_r$ ) 处阻抗低，信号能传出去；在量子比特的频率 ( $\omega_q$ ) 处阻抗高，量子比特的能量不容易漏出去。但谐振器阻抗高的频率范围不够窄，还是会有部分能量泄漏。
- **图 24c 加了 Purcell 滤波器的情况：**在谐振器和环境之间再加一个 Purcell 滤波器（绿色）。滤波器在谐振器频率  $\omega_r$  处阻抗低，读出信号能顺利传出去；在量子比特频率  $\omega_q$  处阻抗极高，几乎完全阻断量子比特和环境的通路。既保证读出信号传得快（谐振器带宽宽大），又让量子比特的能量几乎不漏（退相干慢），解决了 "快" 和 "稳" 的矛盾。
- **图 24d 滤波器的传输谱**（解释为什么能阻断）：横轴是频率，纵轴是传输系数。绿色虚线是 Purcell 滤波器的传输谱：在  $\omega_r$  处传输系数高，信号能过；在  $\omega_q$  处传输系数几乎为 0，信号过不去，量子比特能量也漏不出去。滤波器的通带刚好对准谐振器的频率，阻带对准量子比特的频率。

## 2.7.3 Purcell 滤波器的常见设计

四分之一波长短截线、低 Q 带通滤波器、阶梯阻抗滤波器。

| 设计类型      | 原理                             | 优势                      | 劣势               | 应用场景             |
|-----------|--------------------------------|-------------------------|------------------|------------------|
| 四分之一波长短截线 | 利用微波在传输线中的反射，形成特定频率的阻带         | 结构简单，易集成                | 阻带窄，仅适配单个量子比特频率  | 单量子比特实验          |
| 低 Q 带通滤波器 | Q 值低（带宽宽），通带覆盖谐振器频率，阻带覆盖量子比特频率 | 可同时保护多个量子比特（阻带宽），兼作量子总线 | 插入损耗稍高（约 0.5 dB） | 多量子比特处理器（如表面码架构） |

| 设计类型    | 原理                      | 优势              | 劣势            | 应用场景              |
|---------|-------------------------|-----------------|---------------|-------------------|
| 阶梯阻抗滤波器 | 交替改变传输线的阻抗（高/低），形成周期性阻带 | 阻带多，可适配多个量子比特频率 | 设计复杂，对工艺精度要求高 | 大规模量子处理器（100+ 比特） |

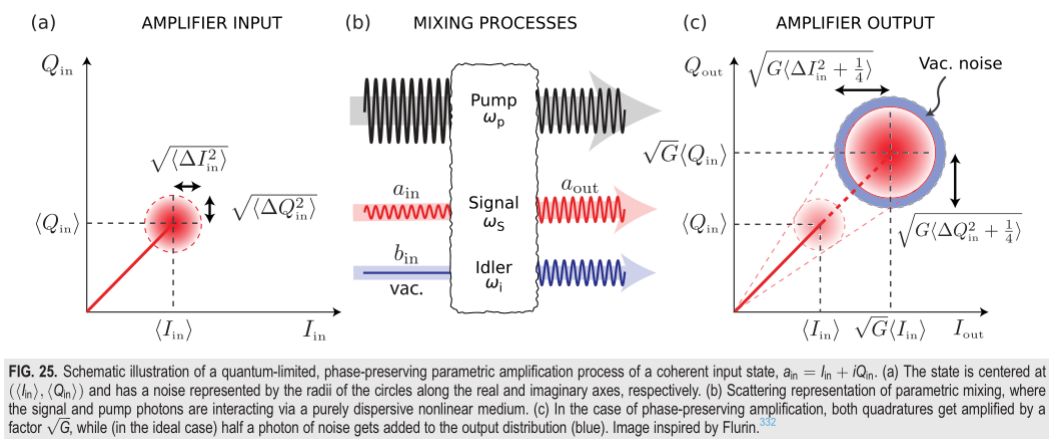
## 2.8 参数放大器

读出信号非常弱，只有几个微波光子，直接测量会被噪声掩盖，我们需要用放大器把信号放大。但普通放大器会加很多噪声，而参数放大器 PA 能实现量子极限放大，只加最少的噪声。图 25（相位不敏感放大）、图 26（相位敏感放大）、图 27 (JPA) 和图 28 (TWPA) 讲清了放大器的原理和类型。

### 1. 为什么不能无噪声放大？

量子力学限制：任何放大器放大信号时，至少要加半个光子的噪声（ $\hbar\omega/2$  per bandwidth），这是海森堡不确定性原理的要求。普通放大器（比如 HEMT）会加很多噪声（大致在 10-20 个光子），信噪比反而下降；参数放大器加的噪声接近半个光子，能有效提升信噪比，适合量子读出。它通过非线性元件（约瑟夫森结）和泵浦信号（提供能量）实现放大，能有效提升信噪比（从 SNR = 0.5 升至 SNR = 3）。

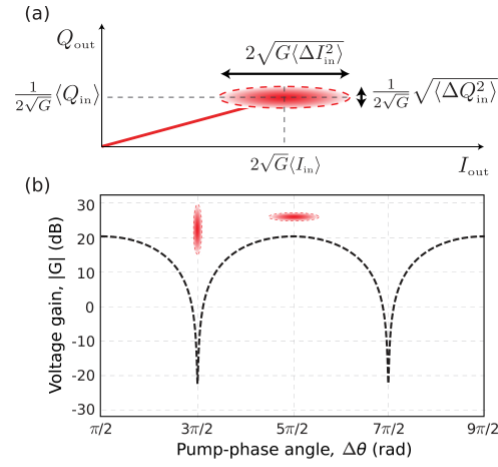
### 2. 相位不敏感放大



- 图 25a：输入信号是 I-Q 平面上的一个红色的点，周围有噪声，用红色圆圈表示；
- 图 25b：放大过程。通过 pump 信号（黑色，提供能量，所以输出会变小）和非线性元件（约瑟夫森结），把输入信号的 I 和 Q 分量同时放大，放大倍数  $\sqrt{G}$ ；
- 图 25c：输出信号。I 和 Q 都变大（右上平移了），噪声也会放大（红晕扩大，而且多了一个 vac.noise），但信号放大的比例比噪声高，信噪比提升。

特点：对 I 和 Q 的放大一样，不影响相位，但加的噪声稍多，接近 1 个光子，适合通用读出。

### 3. 相位敏感放大（仅放大特定相位的信号）



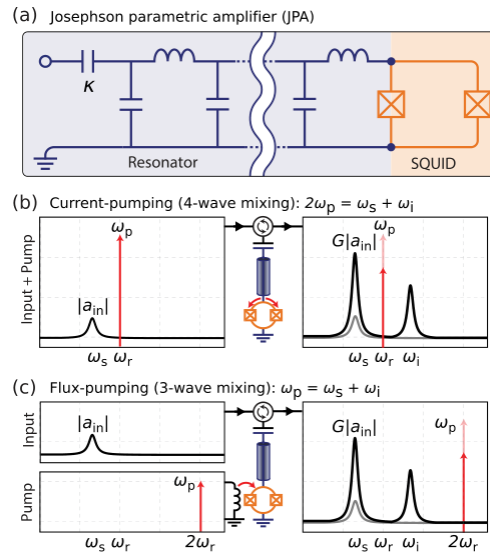
**FIG. 26.** Phase-sensitive parametric amplification. (a) In contrast to the phase-insensitive operation, phase-sensitive parametric amplification allows us to suppress the noise along one axis. Consequently, the noise is added to the other quadrature. (b) Voltage gain as a function of pump-phase angle, in which the amplification depends on the phase of the pump, providing either amplification or de-amplification of the quadrature voltage.

- 图 26a：放大时只放大 I 分量、抑制 Q 分量，或反之，噪声会在一个方向被抑制，信号变扁；
- 图 26b：放大倍数随 pump 相位周期性变化。通过调整 pump 的相位，能选择放大哪个分量。

特点：加的噪声更少，接近半个光子，但需要精确控制泵浦相位，且只能放大一个分量，不适合通用读出。

## 2.8.1 约瑟夫森参数放大器 (JPA)

JPA 示意图如图 27：



**FIG. 27.** Circuit schematics and pump schemes of a Josephson parametric amplifier. (a) The device consists of a quarter-wavelength resonator (blue), represented as lumped elements, shorted to ground via a Kerr-nonlinearity consisting of two parallel Josephson junctions (orange) forming a SQUID. The pump (red) can be applied in two ways; (b) either by modulating the current through the junctions (four-wave mixing) at the resonant frequency,  $\omega_p \approx \omega_r$ , or (c) by modulating the ac-flux  $\Phi_{ac}$  around a static DC-flux point  $\Phi_{dc}$  using a separate fast-flux line (three-wave mixing). The flux pump is applied at twice the resonance frequency,  $\omega_p \approx 2\omega_r$ .

- 图 27a 电路结构：一个谐振器（蓝色 resonator），里面加一个 SQUID（由两个约瑟夫森结构成，橙色，提供非线性）；
- 图 27b、c 两种 pump 方式：
  1. 电流泵浦（4 波混合）：pump 频率  $\approx$  谐振器频率， $\omega_p \approx \omega_r$ ，适合单量子比特，通过调制结电流实现放大；
  2. 磁通泵浦（3 波混合）：pump 频率  $\approx 2 \times$  谐振器频率， $\omega_p \approx 2\omega_r$ ，噪声更少，通过调制 SQUID 的磁通

实现放大。

## JPA 应用分析

- 性能指标：增益 15–25 dB，噪声温度 0.1–0.5 K，带宽 10–50 MHz；
- 优势：噪声极低，适合单量子比特高精度读出；
- 劣势：带宽窄，一次仅能放大一个量子比特的信号，多比特需多个 JPA，成本高。

## 2.8.2 行波参数放大器 (TWPA)

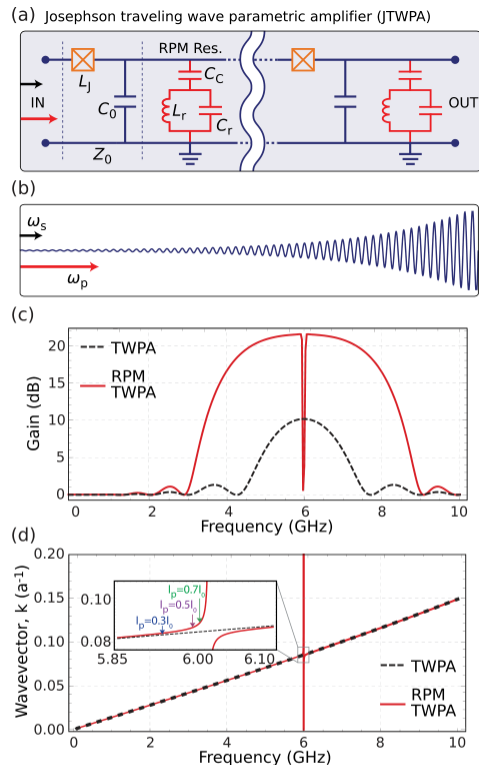


FIG. 28. (a) Simplified circuit representation of a Josephson traveling wave parametric amplifier (JTWPA). The characteristic impedance for each unit cell is set by the in-line Josephson inductor,  $L_I$  (orange) and the shunt capacitor,  $C$  (blue). A resonant LC-circuit (red) is used to phase match the four-wave amplification process. (b) Schematic of how the signal gets amplified in each unit cell as it propagates through the device. (c) Gain vs frequency for a JTWPA, with and without the resonant phase matching (RPM). (d) Dispersion relation of the TWPA, where the LC-resonators collectively open up a stopband at the resonant frequency. By applying the pump close to this frequency, the wave vector of the pump can be set to obtain a phase-matching. The optimal pump frequency depends on the pump power, as indicated in the inset. Image courtesy of Kevin O'Brien.<sup>322,386</sup>

- 图 28a 电路核心：无谐振器，由数百个单元组成（每个单元含约瑟夫森结和电容），形成“超导传输线”；
- 图 28b 信号传输：输入信号沿传输线传播，每个单元通过泵浦信号（蓝色）提供能量，逐步放大信号；
- 图 28c 带宽优势：TWPA 的带宽宽（200–500 MHz），可同时放大多个量子比特的信号（可 10 个比特共用一个 TWPA）；
- 图 28d 相位匹配：通过共振相位匹配（RPM）结构，周期性添加小谐振器，使泵浦信号与输入信号传播速度一致，放大均匀。

## TWPA 应用分析

- 性能指标：增益 20–30 dB，噪声温度 0.5–1 K，带宽 200–500 MHz；
- 优势：带宽宽，适合多量子比特读出（大规模处理器的首选）；
- 劣势：噪声比 JPA 稍高，但可通过主动抵消技术优化至 0.3 K。

## 2.8.3 放大器的级联设计

实际读出系统中，放大器需级联使用，以平衡噪声和增益。系统总噪声由第一级放大器决定（公式  $T_{sys} = T_{N1} + T_{N2}/G1 + \dots$ ），因此第一级必须用低噪声的参数放大器。

- **第一级**：参数放大器（JPA/TWPA，低温 10-20 mK 区）——噪声最低，负责初步放大信号（提升至可检测水平）；
- **第二级**：HEMT 放大器（4K 区）——增益高（30 dB），负责进一步放大信号；
- **第三级**：室温放大器——增益中等（20 dB），将信号放大至数字化仪可采样水平。

## 2.9 量子纠错

Quantum Error Correction

前面讲的量子比特都有误差：逻辑门保真度 99% 意味着每 100 个门就有 1 个错；量子比特相干时间只有 100 微秒，操作慢了状态就丢了。而量子纠错就是用多个物理比特保护 1 个逻辑比特，解决这些问题。所以要容错计算，是因为量子比特很容易出错。具体原因：① 叠加态  $T_1$  和  $T_2$  短；② 用波形调控，给的波形不可能完美；③ 读出的时候不可能 100% 准。错误还会积累：1 次没问题，几百次门操作就会出问题。

**1. 量子纠错的意义**：用多个物理比特的冗余信息，纠正单个比特的错误。

### 2. 纠错码（表面码）

优点：

1. **容错阈值高**：只要物理门的保真度超过 99%，就能通过纠错让逻辑门的保真度接近 100%（前面第四章讲的 CPHASE 门已经达到 99.4%，就可以用纠错提高保真率）；
2. **只要近邻耦合**：量子比特排列成 2D 网格，每个比特只和旁边的比特作用，适合平面芯片的制造。

用多个物理量子比特编码成 1 个逻辑比特：物理量子比特可能会出错，但逻辑量子比特几乎不会出错。物理量子比特就是实实在在的底层超导量子比特，逻辑量子比特就是要通过量子纠错码构建出的不会出错的虚拟比特。

容错计算底层不能用多次重复测来实现：① 不能完美复制一个未知的量子态；② 直接去测量每个物理量子比特的状态，状态就被破坏了，计算就中断。

## 2.10 量子计算优越性

量子计算优越性，也叫“量子霸权”，指量子计算机能解决经典计算机在合理时间内无法解决的问题。这是证明量子计算价值的关键里程碑，文档里重点讲了进展和目标。

## 量子计算优越性竞赛

没有量子优越性，就没有任何提供真正算力的可能  
量子优越性是量子计算机走向可用的一个性能基准门槛

| Experiment       | Fidelity             | Memory Constraint: 9.2PB |                                |                      | Memory Constraint: 762.2PB |                                |                      |
|------------------|----------------------|--------------------------|--------------------------------|----------------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------|
|                  |                      | 1 Amplitude (FLOP)       | 1 Million Noisy Samples (FLOP) | Runtime on Frontier  | 1 Amplitude (FLOP)         | 1 Million Noisy Samples (FLOP) | Runtime on Frontier  |
| Sycamore-53-20   | $2.2 \times 10^{-3}$ | $7.2 \times 10^{18}$     | $6.5 \times 10^{16}$           | 1.6 s                | $5.9 \times 10^{18}$       | $6.1 \times 10^{16}$           | 1.5 s                |
| Zuchongzhi-56-20 | $6.6 \times 10^{-4}$ | $9.3 \times 10^{19}$     | $2.2 \times 10^{17}$           | 5.3 s                | $1.0 \times 10^{20}$       | $1.5 \times 10^{17}$           | 3.6 s                |
| Zuchongzhi-60-24 | $3.7 \times 10^{-4}$ | $3.2 \times 10^{21}$     | $1.6 \times 10^{19}$           | 384.0 s              | $3.0 \times 10^{21}$       | $2.3 \times 10^{18}$           | 55.2 s               |
| Sycamore-70-24   | $1.7 \times 10^{-3}$ | $1.7 \times 10^{25}$     | $8.2 \times 10^{25}$           | 62.1 yr              | $3.2 \times 10^{24}$       | $1.4 \times 10^{24}$           | 1.1 yr               |
| Sycamore-67-32   | $1.5 \times 10^{-3}$ | $8.2 \times 10^{28}$     | $4.7 \times 10^{27}$           | $3.6 \times 10^3$ yr | $1.3 \times 10^{26}$       | $9.6 \times 10^{24}$           | 7.2 yr               |
| Zuchongzhi-83-32 | $2.5 \times 10^{-4}$ | $5.1 \times 10^{31}$     | $8.4 \times 10^{33}$           | $6.4 \times 10^9$ yr | $1.3 \times 10^{29}$       | $7.5 \times 10^{31}$           | $5.7 \times 10^7$ yr |

实现量子优越性只是开端：

- 10000 years V.S. 200s google [Nature, 574, 505 (2019)]
- 19 days [arXiv:2005.06787 (2020)]
- 5 days by using only 60 GPUs [arXiv:2103.03074 (2021)]
- 304 sec with 神威 1.2 Eflops [arXiv:2110.14502(2021)]
- 15 hours by using 512 GPUs [PhysRevLett.129.090502]

- [1] Nature, 574, 505 (2019), G. Q. Ai
- [2] PRL 127, 180501 (2021), USTC
- [3] Science Bulletin 67, 240 (2022), USTC
- [4] Nature 634, 328 (2024), G. Q. Ai
- [5] PRL 134, 090601, 2025

**1. 优越性的体现：**不是分解大数（Shor 算法），而是随机量子电路采样。实验机理是让量子比特执行一系列随机的逻辑门，然后测量输出状态的概率分布。经典计算机要模拟这个分布，需要的时间会随量子比特数指数增长——可能 50 个量子比特，经典计算机就需要几万年。这个问题不需要实用价值，只需要“经典模拟难”，就足够用来证明量子计算的速度优势。

**2. 当前进展：**2018 年实验用了 9 个可调谐 transmon 量子比特（也就是第四章讲的 split transmon），实现了随机电路采样。虽然量子比特数少，但证明了思路可行。未来的目标是：预计用 50–100 个高保真量子比特（门保真度 > 99.5%，相干时间 > 100 微秒），就能实现经典计算机无法模拟的采样任务。目前谷歌、IBM、中科院和咱中科大等都在朝这个目标推进。

**3. 里程碑的意义：**这个里程碑为什么重要？因为可以证明量子计算的独特价值。如果能实现优越性，就说明量子计算机不是经典计算机的升级版，而是能做经典计算机做不到的事；为了实现优越性，需要解决量子比特的保真度、相干时间、大规模控制等一系列问题，会带动整个超导量子技术的进步。

## 2.11 量子指标

- **保真度：**想要的状态和实际状态重合，保真度就为 100%，就是 qubit 的制备精度。
- **退相干时间：**就是维持量子叠加态的时间，有  $T_1$  和  $T_2$ 。 $T_1$  为能量弛豫时间，从 1 态衰变到 0 态、丢失能量的时间； $T_2$  为相位相干时间，丢失相位信息的时间。一般  $T_2$  会小于  $2T_1$ 。

总结：保真度是制备精度；退相干时间是比特持久时间。

## 三、超导量子测控系统

这部分讲我对我们实验室做的工作的认识，即整个超导量子测控系统。

### 3.1 ezQ 系统整体认识

ezQ 系统是中国科学技术大学与合肥国家实验室合作项目，是潘院士团队下超导量子测控相关电子学设备中的项目分支。我们为祖冲之系列超导量子计算机服务，未来预计提供一套支持千个量子比特的设备，价值巨大。

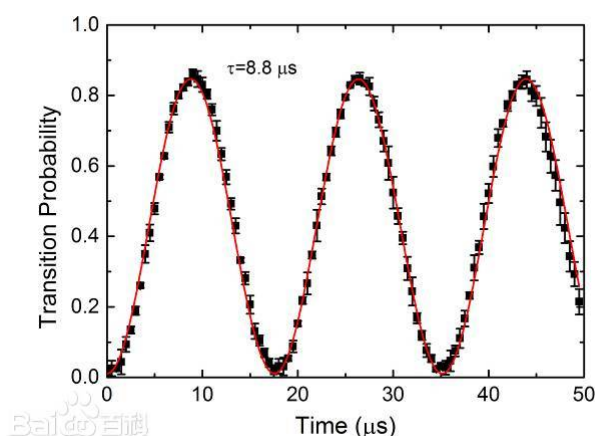
整体组成部分分为软件和硬件：软件分为 QOS + 一体化驱动；硬件就是 ez-Q2.5 系统，包括通信、反馈、调控、读出、机箱和时钟同步。

**数据流为：**软件和通信子系统之间通过 4 个万兆网模块通信（高速 GT 收发器，理论总速率可达 40 Gbit/s）。软件还需与反馈子系统通信，反馈子系统再和读出子系统通信（GTH）。通信子系统通过 aurora（GTH）与调控、读出子系统通信；通信子系统和读出子系统的混频和 pump 部分用的是串口通信。读出子系统给量子处理器 pump、RO 和 RI 信号，调控子系统给量子处理器 XYZ、ZCP 信号，共 5 个类型的信号。

**调控类型：**主要分两类，一个是 Qubit 调控，一个是 Coupler 调控。

- **Qubit 调控：**对量子比特进行状态操作和参数校准的过程，核心作用是实现量子比特的态制备（如将其置于  $|0\rangle$  态）、门操作（如单量子比特门 X、H 门），以及参数优化（如频率、衰减率校准）。通过向量子比特施加特定频率、幅度和时长的微波脉冲，精准操控其能级跃迁，是实现量子计算逻辑操作的基础。
- **Coupler 控制：**Coupler 即耦合器，是连接多个量子比特的关键组件，核心作用是控制量子比特之间的相互作用强度，实现多量子比特门操作。未启用时可隔离量子比特，避免串扰；启用时通过调节耦合强度，让量子比特间交换量子信息，支撑两量子比特门（如 CNOT 门）等复杂操作。

**调控系统：**调控系统有三种控制信号——XY 控制、Z 控制、RESET 与 LRU 控制，通过三合一输入量子芯片中，减小扇出线数量。微波源 + AWG 通过矢量调制，可以让量子比特 XYZ 轴旋转。拉比振荡（下图）可以用来调试  $\pi$  脉冲幅度和时长。Z 芯片控制 Z 轴相位旋转。



- **RESET 控制：**可以让比特状态重置，比如说基态 0。
- **LRU 控制：**泄露抑制，防止比特从 0 跳到 2 或 1 跳到 2。
- **Qubit 合并 Z 通道控制：**频分复用，多个比特的 Z 轴能够一起控制。
- **Coupler Z 控制：**控制比特间的耦合强度，ZZ 相互作用。
- **同步控制：**多种控制之间，时间同步性要好，可能误差要控制到 1 ns 以内。

## 3.2 调控 XY 芯片

两种模式：4–5.6 GHz 的单比特门控制模式；0.5–2.5 GHz 的 RESET/LRU 控制模式。

用 SPI Slave 配参数，NCO 和调制器负责波形生成，MCU 指令控制。

- **NCO 的相位累加器和查找表映射：**每个时钟周期都会将频率控制字累加一次，值就代表相位。频率控制字越大，累加就越容易溢出，点也就越少，反应的波形频率也越大。只要改变频率控制字，可以不用中断波形生成，直接改变频率。累加器输出的数字需要用波形查找表做一个映射再输出。
- **调制器：**在需要产生复杂调制信号或进行单边带混频时，NCO 会生成相位相差  $90^\circ$  的正余弦两路信号（I 和 Q），调制器模块再将这个信号与自定义的基带包络波形相乘，直接生成调幅或调相后的射频脉冲信号。
- **内插模块：**DAC 的“阶梯效应”会产生大量高频分量，而且加滤波器不可能完美实现过滤，所以需要内插。在波形存储器和 DAC 之间放一个内插模块：上采样就是在输入波形点之间插 N-1 个 0，采样率就变成 N 倍。

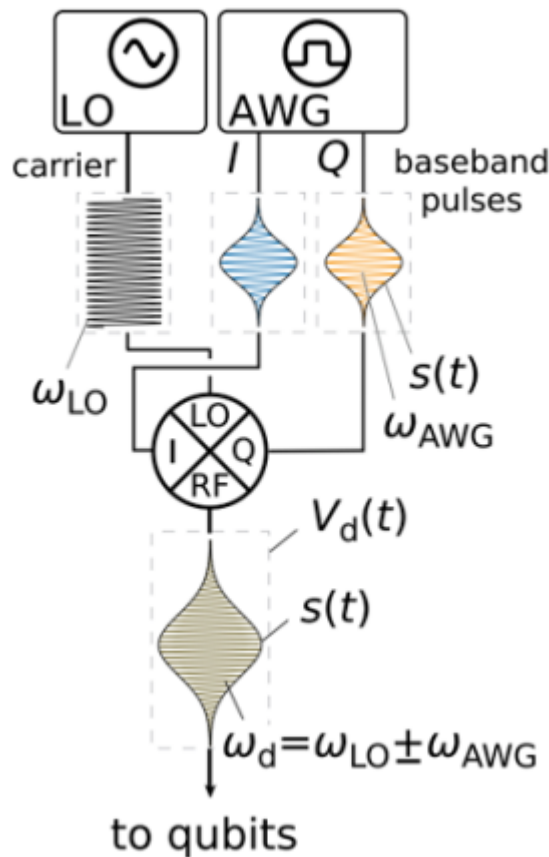
但这样做会在新采样率  $N \cdot f_s$  位置整数倍处出现原始信号，我们可以用一个高性能的数字滤波器去滤除，只保留 DC 到  $f_s/2$  的基带信号，输出波形质量就变高了。

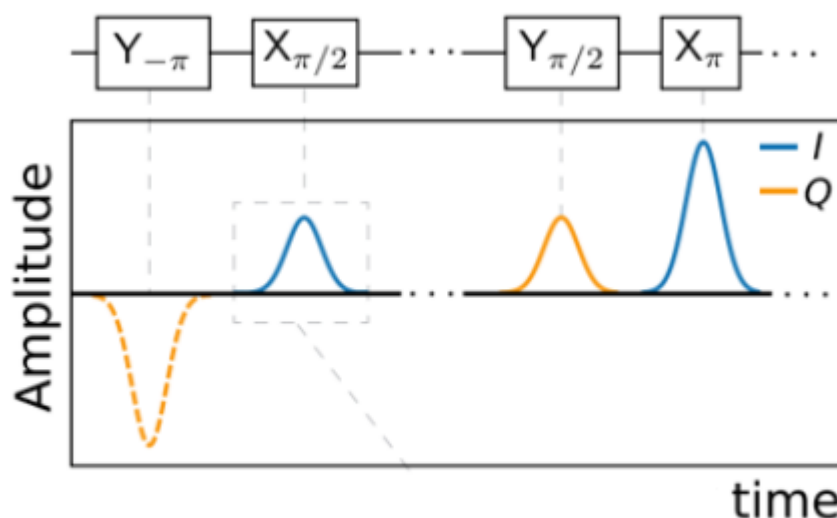
carrier 用来上变频的不用管，关键是 **IQ 混频** 是什么样子：I 的包络面积就是绕 X 轴旋转的角度，Q 的面积就是绕 Y 轴旋转的角度。在 AWG 里面就要把 I 包络和中频载波进行混频了，这个叫中频载波（IF Carrier）。

这底下是传统方案，DAC 频率不够：

**传统的 IQ 混频方案**：AWG 生成中频（IF）的正弦波，然后送入外部的 IQ 混频器，与来自微波源（LO，本振）的更高频率正弦波再次合频，最终达到 4–6 GHz。如果 AWG 的 I 路波形没有频率，而 LO 的频率是死的，就没法微调刚好撞上量子比特的共振频率了。

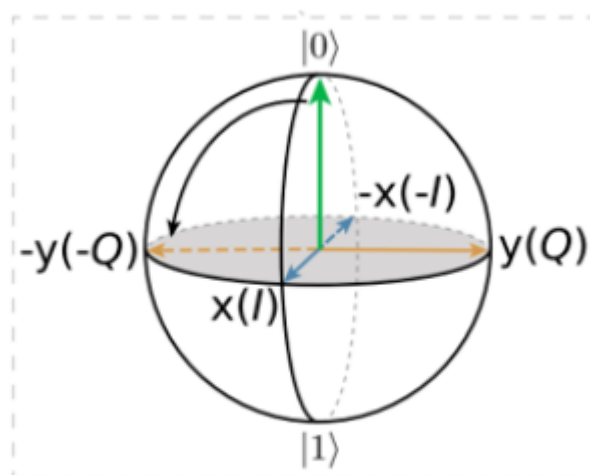
**IQ 调制**：I 是同相，负责让比特跃迁；Q 是正交，抵消由量子比特非谐性引起的泄漏和相位误差。I 和 Q 信号在时域上相差  $90^\circ$  相位，所以叫正交调制。XY 调控是这样的，旋转轴的位置是由 IQ 分量幅度决定的， $\phi = \arctan(I/Q)$ 。





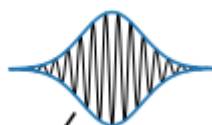
b) 门序列转换为 AWG 波形示意图

所谓的  $X_{\pi/2}$  脉冲效果就是这样：



c) XY 脉冲对量子比特初始化示意图

输出是调制型的高斯脉冲：外层包络决定持续时间、能量分布；内层载波决定量子态跃迁。

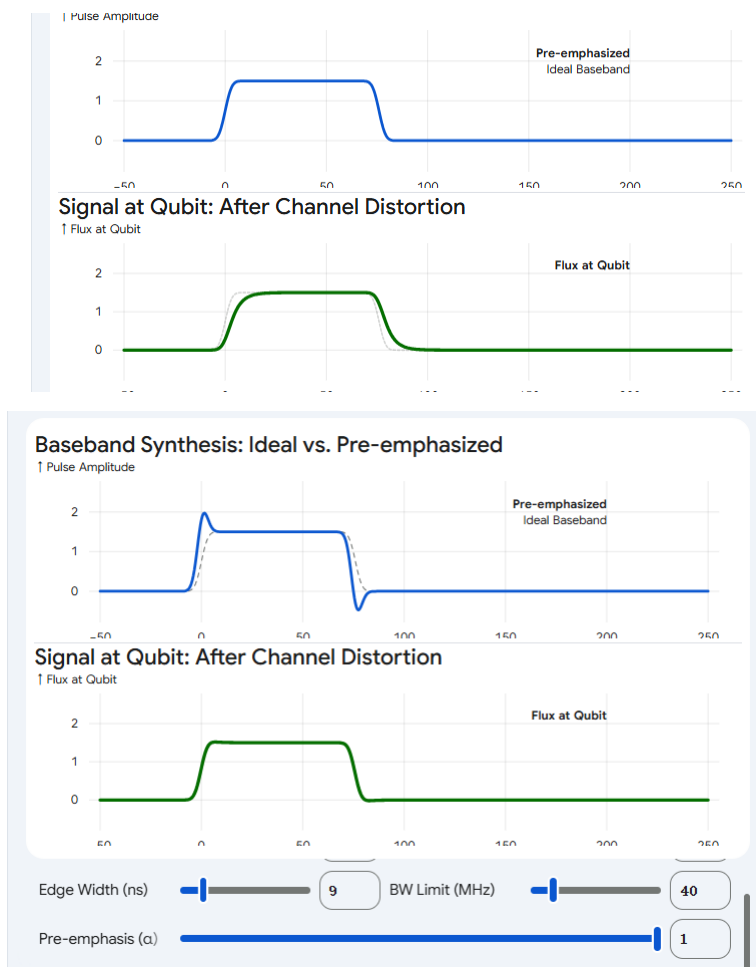


量子比特如果吃了一个调制型的高斯脉冲，怎么变取决于脉冲的 **总能量（面积）**： $\pi/2$  脉冲从北极 0 到赤道； $\pi$  脉冲从北极 0 到南极 1（X 门）。能量脉冲更长，就会出现激发到 2 态。I 是同相，负责让比特跃迁；Q 是正交，抵消由量子比特非谐性引起的泄漏和相位误差。I 和 Q 信号在时域上相差  $90^\circ$  相位，所以叫正交调制。

### 3.3 调控 Z 芯片

快 Z 信号做门操作，用于纠错耦合；慢 Z 信号做静态偏置，控制基本频率。

**拖尾矫正**：用一个测试脉冲，采集整个链路实际波形，就可以分析出波形拖尾的信息，然后在发送正式波形的时候再补偿参数进行矫正。没有矫正之前是上面这样的，矫正之后就是底下那样的。



Z 芯片是控制量子比特能级间距的，调节量子比特需要的频率。Z 线通过电感耦合向量子比特注入磁通量，这个磁通量会改变约瑟夫森结的能量 ( $E_J$ )，进而直接改变量子比特  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  态之间的 **能量差**。Z 控制就是调频：要在纳秒级时间内 **动态切换** 比特频率，就用快 Z（要用 AWG 控制）；让其频率稳定在一个工作点，就用慢 Z（慢 Z 用高精度直流源就行）。

让一个比特的频率在短时间内变高，相当于跑得更快，相当于积累了一个相对相位。所以 Z 就是提供一个直流偏置，在直流偏置上偶尔再叠加一个矩形波。

**纠缠操作就是**：平时为了防止互相干扰，比特们的频率是错开的；**做门时** 施加一个 **快 Z 脉冲**，瞬间把比特 A 的频率"拨"到比特 B 附近（或某个共振点），让它们产生相互作用（如 CZ 门或 iSWAP 门），完成后再拨回去。

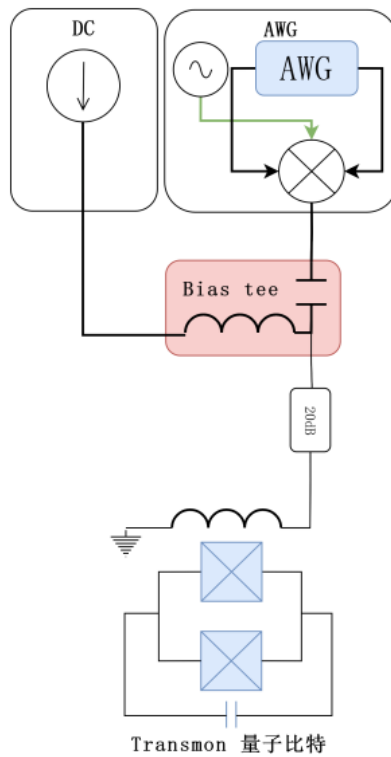


图 2-6 典型量子比特 Z 调控示意图

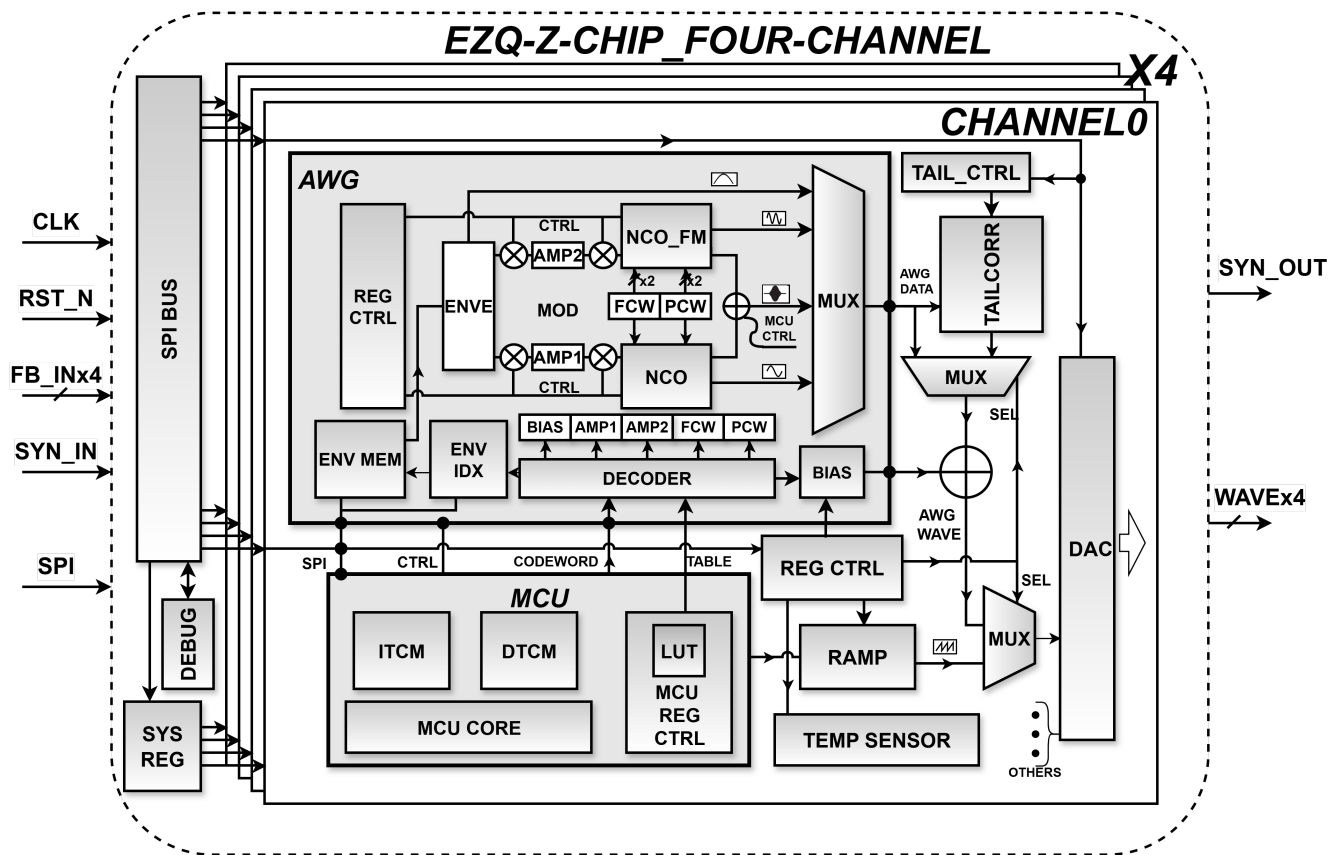
Z 芯片一般叫通量控制 (Flux Control) 。

超导量子比特 (尤其是 Transmon 比特) 的核心是一个被称为 **SQUID** (Superconducting Quantum Interference Device, 超导量子干涉器件) 的结构。SQUID 环的等效电感取决于穿过这个环路的外部总磁通量。LC 电路的谐振频率公式为  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 。

改变控制线电流  $\rightarrow$  改变磁通量  $\Phi \rightarrow$  改变等效电感  $L \rightarrow$  **改变量子比特的频率  $f$**  (能级间距) 。

- **XY 控制**：通过微波 (电场) 让比特在 0 和 1 之间 **翻转**；
- **Z 控制 (通量控制)**：通过磁场改变比特的 **能级间距 (频率)** 。

由于我是负责 Z 芯片的，因此对 Z 芯片的架构比较熟悉，如果想进一步了解，可以参考我写的一个芯片手册。



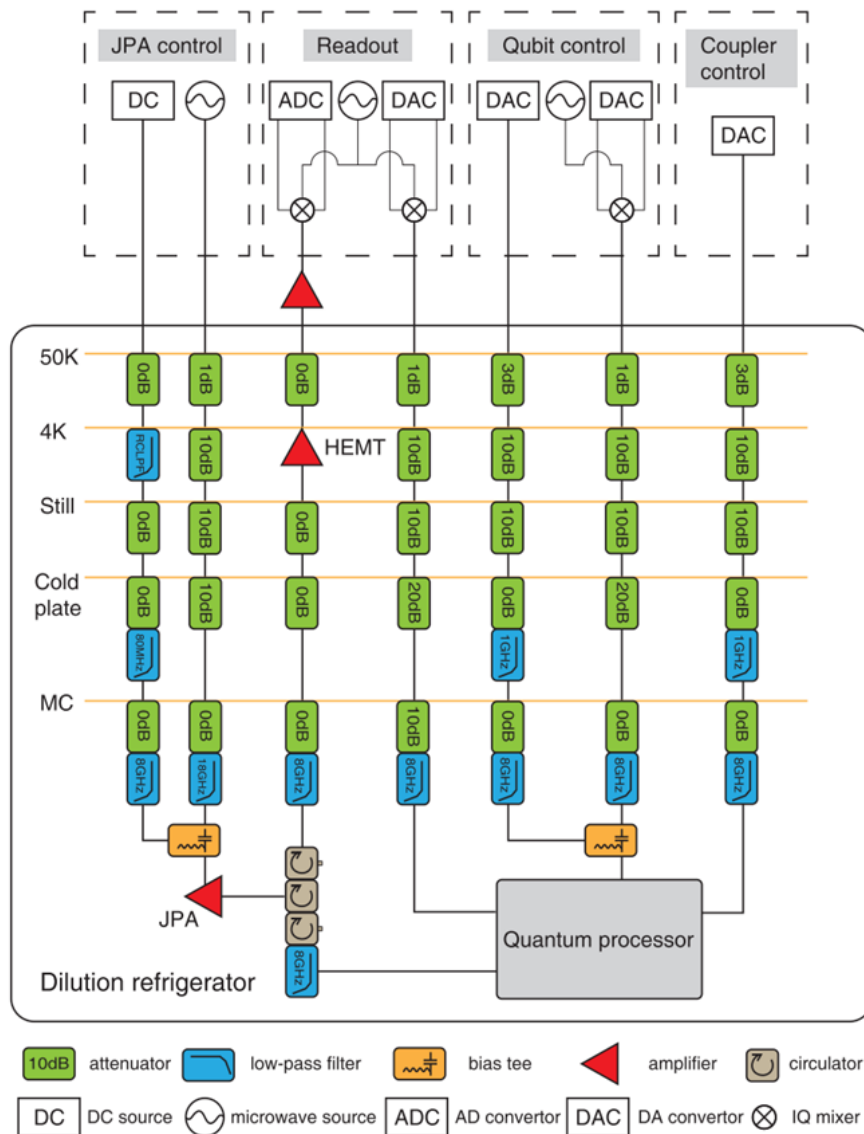
### 3.4 读出系统

分为 3 个板：基带板、混频板、泵浦板。

工作流程为：

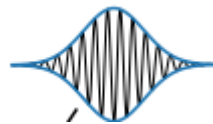
1. 先开 Pump 信号（提前 / 和激励同步给），做好 "回波增强" 的准备；
2. 基带板 → 混频板（上变频）→ 量子比特（发激励信号）；
3. 量子比特受激，发出 **增强版回波**；
4. 回波 → 混频板（下变频）→ 基带板（采集处理）。

科学组目前的样品测量常见的测控组成部分，主要由 JPA 控制、Qubit 读出、Qubit 调控、Coupler 控制 4 部分组成。

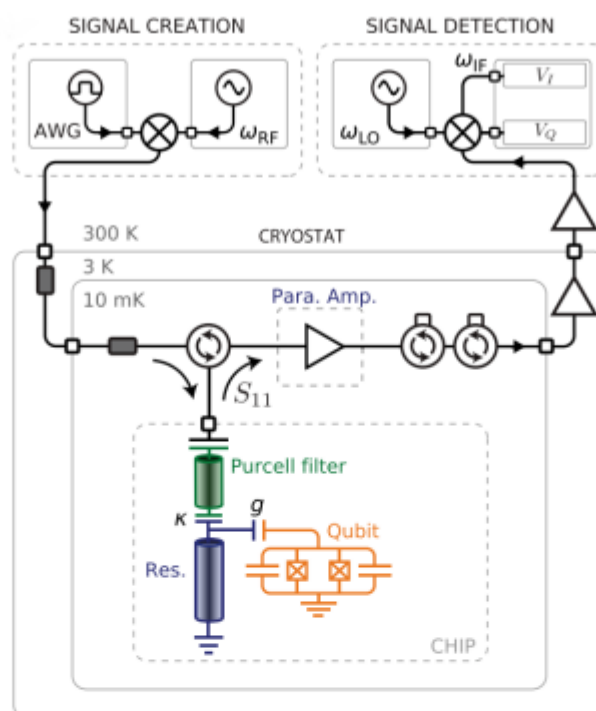


JPA 是约瑟夫森参量放大器，作用是放大量子比特的微弱读出信号。Qubit 读出就是要知道量子比特处于  $|0\rangle$  态、 $|1\rangle$  态或叠加态的具体信息。常用方式是通过共振耦合将量子比特的态信息转化为可测量的电信号（如频率、相位变化），经 JPA 放大后，由后端仪器采集并解析。

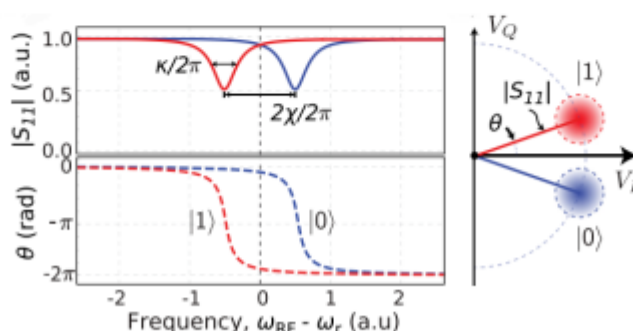
**基带板是核心**，集成 MCU（微控制器）和 SPI 总线，总控混频板、泵浦板，生成激励基带信号，采集处理回波基带信号。其中有三个通道：AWG 生成（EXCT 通道）、pump\_en 使能信号（Pump 通道）、DAQ 采集（ACQ 通道）。其中的 EXCT 通道发送的就是如下的核心射频驱动信号，是调制型的高斯脉冲：外层包络决定持续时间、能量分布；内层载波决定量子态跃迁。



量子比特如果吃了一个调制型的高斯脉冲，脉冲怎么变取决于脉冲的 **总能量（包络时间积分面积）**： $\pi/2$  脉冲从北极 0 到赤道（类似哈达玛门）； $\pi$  脉冲从北极 0 到南极 1（X 门）。能量脉冲过强过长，就可能会出现激发到 2 态，出现布居泄露。



a) 色散量子比特反射式读取实验装置示意图



b) 色散读取原理

图 2-7 色散量子比特反射式读取示意图<sup>[42]</sup>

对于上述图片的解释：

- **纵坐标  $|S_{11}|$  的含义：**代表 **反射系数的幅度**。1.0 代表微波全部被反弹回来了（像撞到了镜子）；靠近 0 代表微波“钻”进谐振腔里去了，没有反射回来。量子谐振腔（Resonator）本质上是一个选择性吸收能量的装置，只有当入射微波的频率  $\omega_{RF}$  正好等于谐振腔的共振频率  $\omega_r$  时，微波能量才能高效地进入谐振腔并在里面振荡，在共振点附近反射回来的能量最少。
- **纵坐标  $\theta$  的含义：**代表反射回来的微波相对于发进去的微波，在时间（相位）上延迟了多少。可以看到在 **共振点**（即  $|S_{11}|$  最深的地方）相位的变化是最剧烈的。
- **跨越共振：**当微波频率从“低于共振”扫描到“高于共振”时，相位会发生一个总共  $2\pi$ （或图中的 0 到  $-2\pi$ ）的巨大漂移。
- **Qubit 改变了谐振腔：**当量子比特在  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  切换时，谐振腔的共振频率发生了  $2\chi$  的移动，就好比你把两个“坑”在横轴上左右拨移了一点点。我们在图中间虚线（ $\omega_{RF} - \omega_r = 0$ ）的地方打入微波。**结果差异：**对于  $|0\rangle$  态（蓝色），相位接近 0；对于  $|1\rangle$  态（红色），相位接近  $\pi/2$ 。**结论：**同样的微波进去，回来的时候，如果是  $|0\rangle$  态，波形被“推迟”了一大截；如果是  $|1\rangle$  态，波形几乎没动。

用一个固定频率信号去探测，因为共振峰挪动了，信号在腔里的 "响应高度" 和 "延迟时间" 就变了，表现为 **相位跳变**。相位差越大，这两个点在圆弧上的距离就越远。

### 3.4.1 读出芯片

分 RI、RO 和 PUMP 三部分。RI 就是 EXCT 激励通道，输出激励给混频板。输出的基带信号要和本振信号混频、上变频才能输入给比特。RO 就是 ACQ 采集通道，量子比特的回波信号给混频板处理，混频板上的 DAC 再传给基带板，基带板再处理。

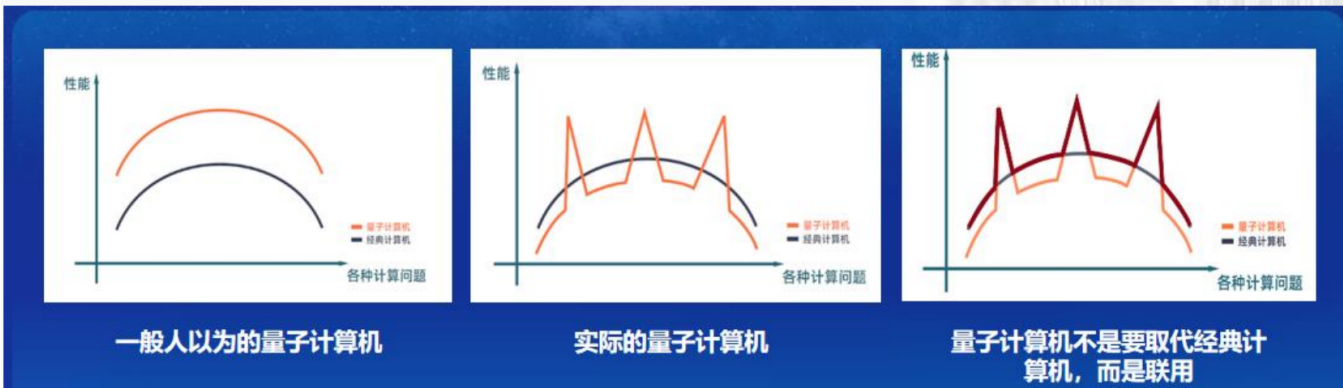
**读出原理（色散读出）：**过中间介质——读取谐振腔（Readout Resonator）来间接感知量子比特的状态，是非破坏性的测量方法。谐振腔在物理上通常是一段弯曲的超导传输线（微波波导），其共振频率会变，被放置在量子比特（Transmon）旁边，两者通过电容产生能量耦合。量子比特所处的能级状态（是  $|0\rangle$  还是  $|1\rangle$ ）会像 "重力" 一样微弱地改变谐振腔的固有频率：

- 比特在  $|0\rangle$  态时，腔的谐振频率偏移到  $f_0$ ;
- 比特在  $|1\rangle$  态时，腔的谐振频率偏移到  $f_1$ 。

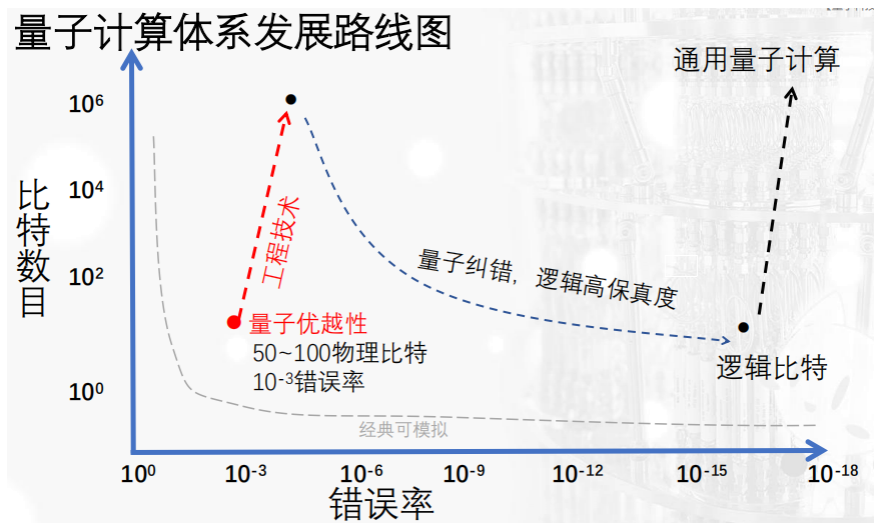
当你向这条线路发射一束微波（探测脉冲）时，如果微波频率接近腔的谐振点，微波会被腔 "挡住" 并弹回来（反射）。因为腔的频率变了，反射回来的微波信号在 **幅度** 和 **相位** 上也会随之发生变化。

## 四、超导量子计算机

### 4.1 超导量子计算机的认识



超导量子计算机发展不是为了取代量子计算机，而是配合使用，解决一些经典计算机解决不了的问题。



## 4.2 超导量子计算机的标定

这一章可以参考陈福升和李少炜博士的大论文，以及国盾工程师陈丹凝写的超导量子机标定流程。

**为什么要标定？** 因为量子芯片不是理想器件，每个比特、每条控制线都有微小差异：频率有偏差、控制幅度不准、波形有时序错位、比特之间还会互相串扰。不标定，测出来的量子比特就是乱的。标定是为了让每个比特的频率准、门操作准、读取准、比特之间互不干扰，最终做出 "高保真度" 的量子门。

### 4.2.1 超导量子计算机的标定流程

标定是一个从粗到细、层层递进的过程。

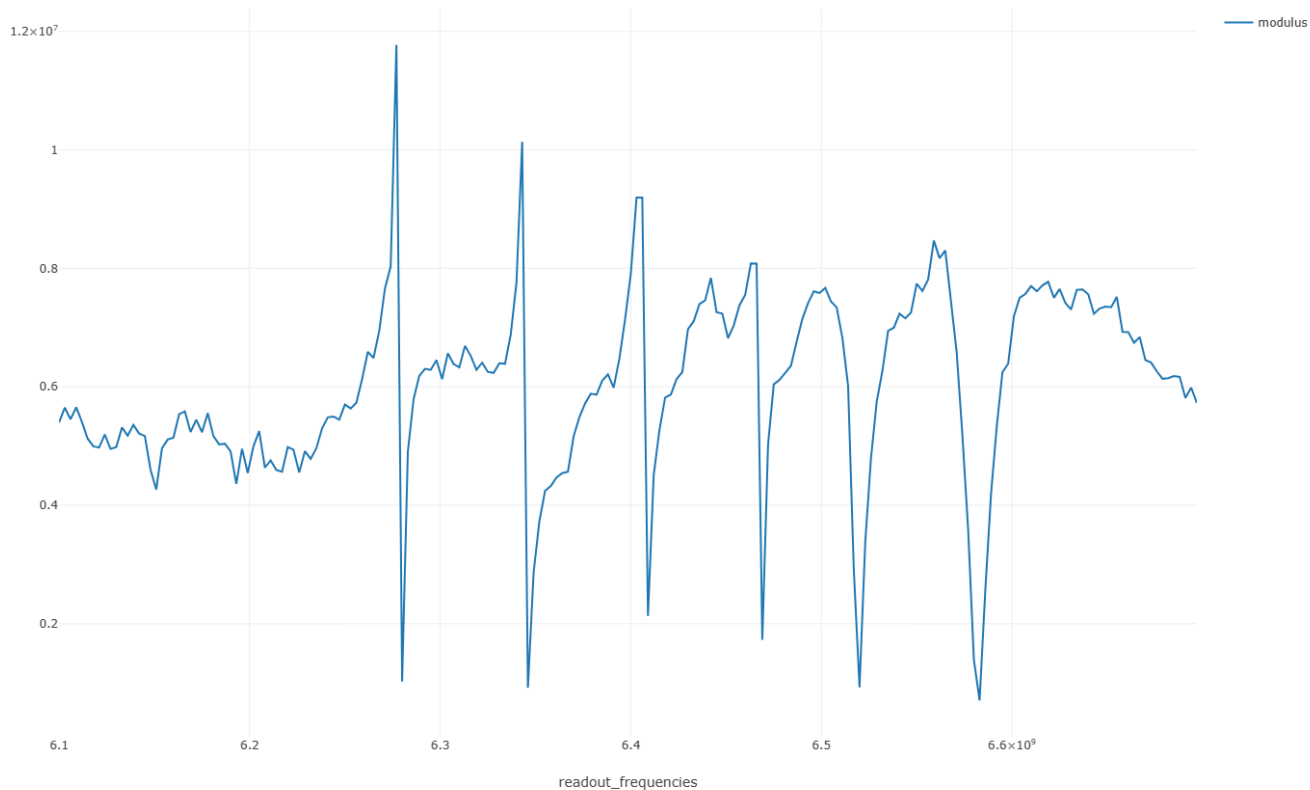
| 阶段     | 解决的核心问题                | 对应的实验                                |
|--------|------------------------|--------------------------------------|
| 准备阶段   | 每个元件通不通、活着没活着          | 读取腔频、色散位移、各控制线正常                     |
| 初步标定   | 每个比特的工作频率 $f_{01}$ 是多少 | 二维 Rabi、Rabi01、读取保真度、JPA 放大          |
| 关断耦合器  | 让比特之间互不干扰              | 耦合器关断点、二维 $f_{01}$ 、 $T_1$ / $T_2^*$ |
| 单比特门标定 | 单个比特的门做得好不好            | 重排频率、门幅度、Drag、单比特 XEB                |
| 两比特门标定 | 两个比特之间的门做得好不好          | XYZ timing、直流门 / 交流门、CZ XEB          |

一句话记住：**先确认活着 → 测准频率 → 隔离比特 → 打磨单门 → 打磨双门**。每一步都建立在前一步之上，越往后越精细。

### 4.2.2 准备阶段

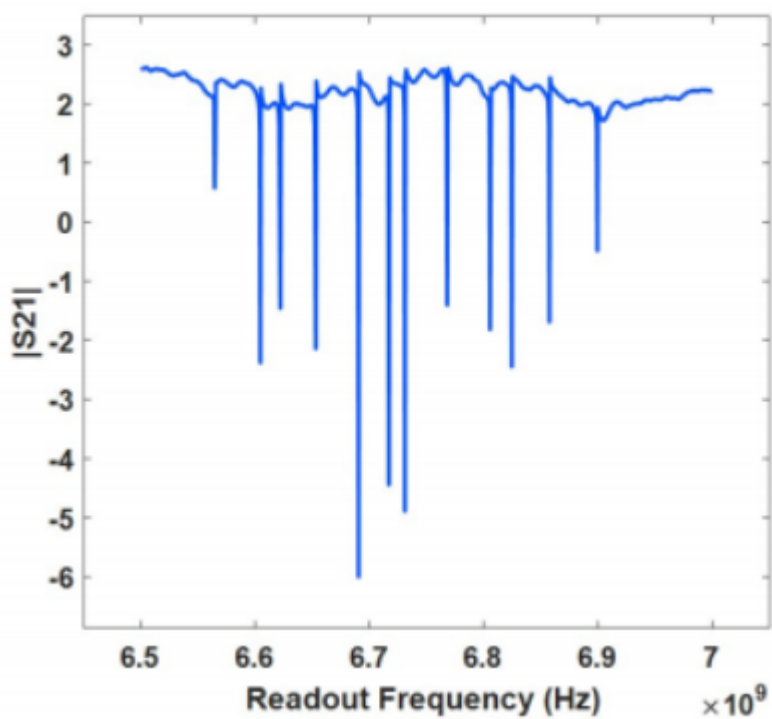
#### 4.2.2.1 读取腔频

一条读取线上连着 6 个读取腔（由量子芯片拓扑结构决定），先用一个大范围的扫描，把每个读取腔的谐振频率大致找出来，并确认它们都通。



- **怎么看：**横轴是读取频率，纵轴是信号响应强度。曲线上的一个个向下凹的谷（吸收峰）就是一个个读取腔的谐振频率。
- **关键位置：**图中 6 个谷的位置，就是 6 个读取腔的腔频。
- **作用：**先把腔频大致填进注册表，为后续所有 "读取" 打基础。这一步频率是粗的，之后还会精扫。

在李少炜博士论文中，有补充这个图像的含义：



读取有 4 个 S 参数，也叫散射参数：S21 指的是 1 端口输入、2 端口输出，叫穿透系数；S11 叫反射系数；S22 叫输出反射系数；S12 叫反向穿透系数。

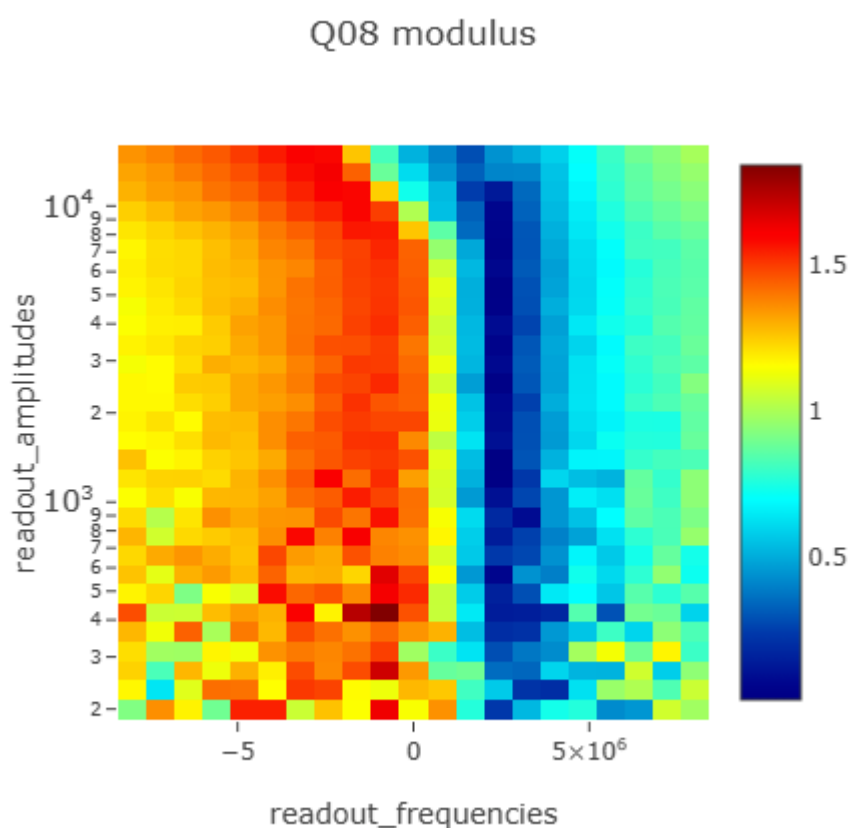
微波本质上是电磁波，电磁波量子化就叫做光子，所以谐振腔里面装了几个光子这种表述不要觉得奇怪。

要确定读取频率，我们要去扫穿透系数的图像，找到吸收峰。比如把量子 0 态定在吸收峰 A 位置，如果量子变 1 态，吸收峰会偏移；此时再打吸收峰 A 位置的微波，会从原来几乎全吸收，变成有很强的反射，从而得到量子信息，这就是所谓的色散耦合。

#### 4.2.2.2 色散位移

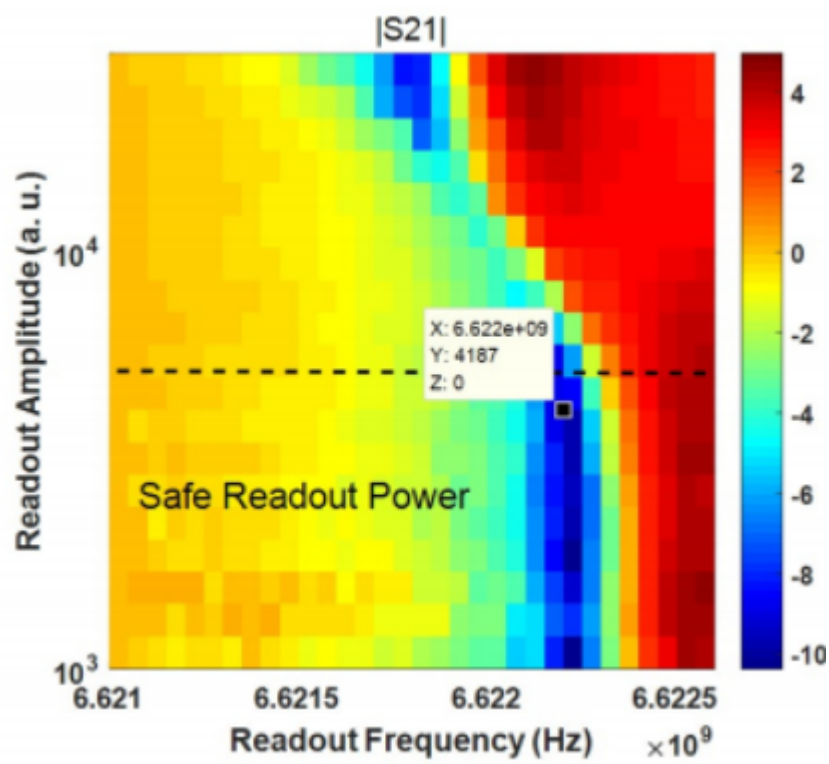
腔和比特是挨在一起的，如果读出功率很大时，震动能量会通过耦合通道传给量子比特，导致量子比特受到影响。

**它在干什么：**在读取频率和读取幅度两个方向上做二维扫描。它能告诉我们两件事——比特是否活着，以及读取幅度应该取多大。



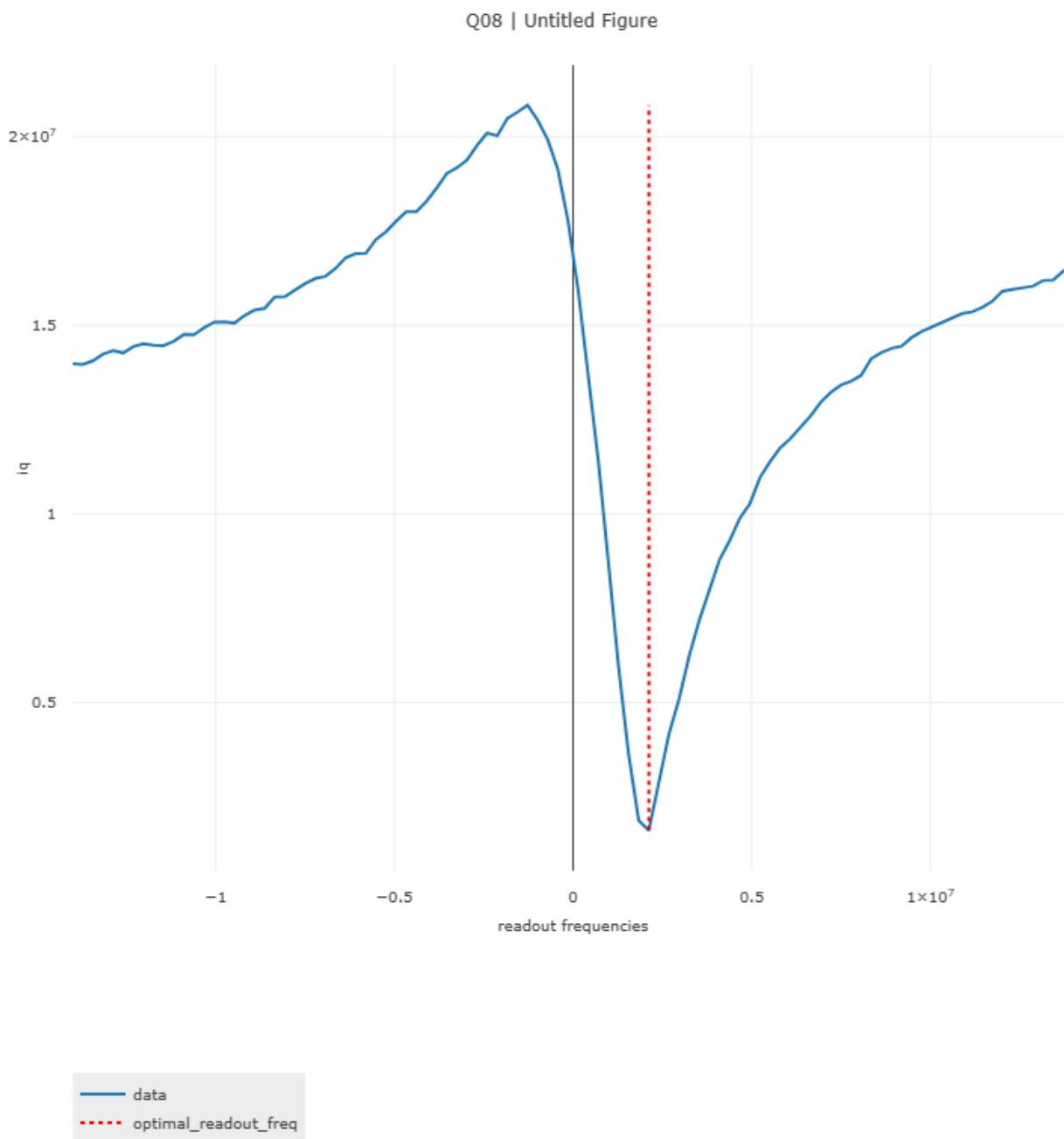
- **怎么看：**横轴是读取频率（相对值），纵轴是读取幅度，颜色深浅代表信号强度。图中会出现 **垂直的条带**，表示在该频率区间读取响应最强。
- **关键位置：**颜色对比最强的垂直条带区域，就是适合工作的读取频率区间；同时从图中能判断出 **最大可用读取幅度**。
- **作用：**① 确认比特存活；② 确定一组够用的读取幅度，方便后面的测量。

在李少炜博士论文中也有相似的图像，可以看出我们可以确定最大读出幅度：



#### 4.2.2.3 精扫读取峰值

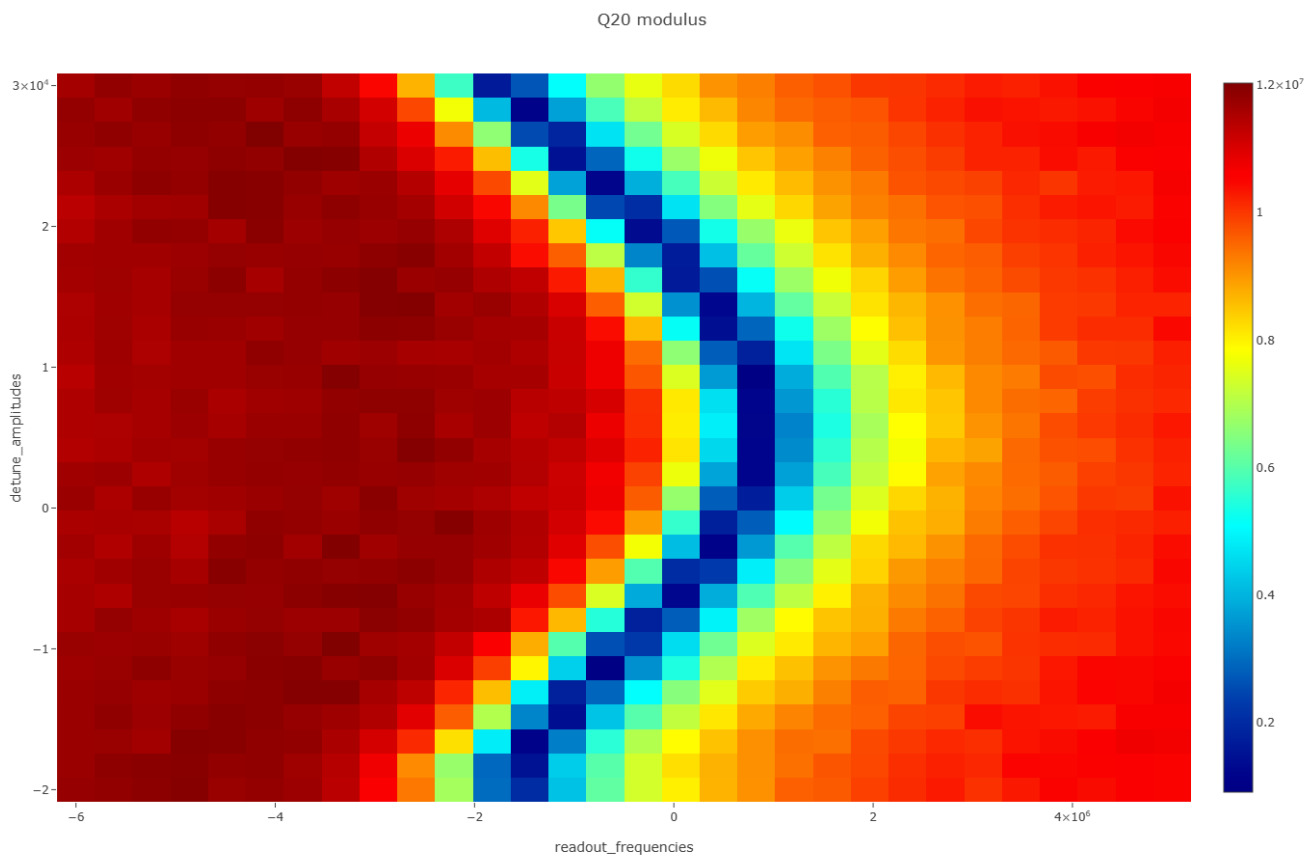
**它在干什么：**幅度已经定好，现在把频率范围缩小，精确定位读取腔的峰值，并自动写回注册表。



- **怎么看：**横轴是读取频率（相对值），纵轴是 IQ 信号强度。曲线最低点（红色虚线标注处）就是最佳读取频率。
- **关键位置：**红色虚线 `optimal_readout_freq` 对应的低谷。
- **作用：**给每个比特定下读它的频率，保证读取信号最强、最清晰。扫描范围不能太大，免得扫到相邻的腔。

#### 4.2.2.4 比特 Z 控制线

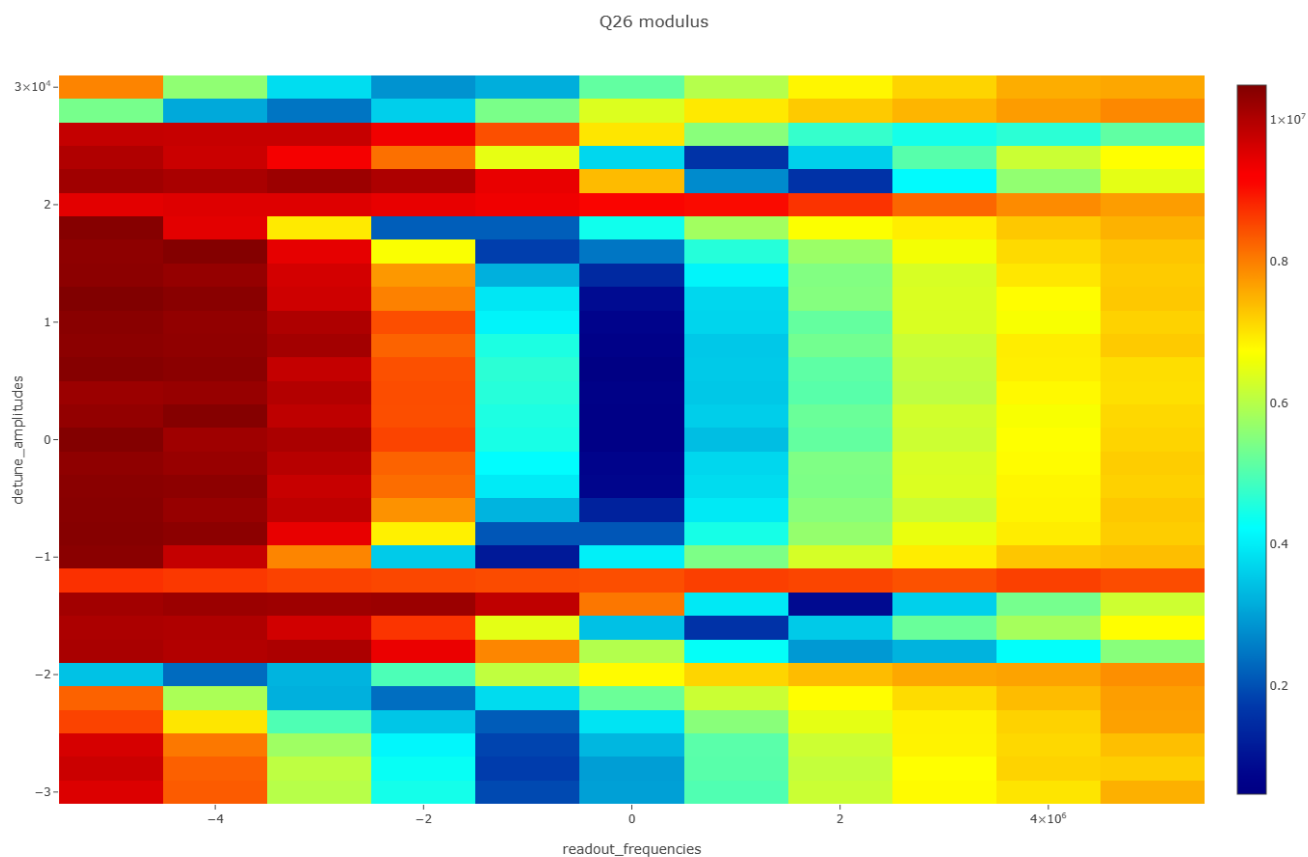
**它在干什么：**给比特施加一个随偏置变化的 Z 信号，同时扫描读取频率，得到一张二维图。作用是 **检查 Z 控制线通不通**，并顺带测出 "剩磁" 造成的频率偏移。



- **怎么看**：横轴是 Z 偏置幅度，纵轴是读取频率（或信号），图中会有一条约呈抛物线的亮带。
- **关键位置**：亮带的 **对称轴** 对应比特频率最大的偏置点。
- **作用**：若 Z 控制线正常，会看到这条漂亮的曲线；若异常，图会变成一条竖直的蓝线。这里记下的对称轴数值，后面 "偏走相邻比特" 时要用。

#### 4.2.2.5 耦合器 Z 控制线

**它在干什么**：原理和比特 Z 一样，只是偏置加在耦合器上。由于 **耦合器会改变两端比特的读取频率**，所以扫描时读取频率会跟着移动，从而确认耦合器 Z 线正常。



- **怎么看：**横轴是耦合器 Z 偏置，纵轴是读取频率。如果读取频率随偏置明显移动（形成条带/弯曲），说明耦合 Z 线正常。
- **关键位置：**读取频率随偏置变化的区域。
- **作用：**确认耦合器可被控制。耦合器两端各连一个比特，**只要任一端测出来正常就算合格。**

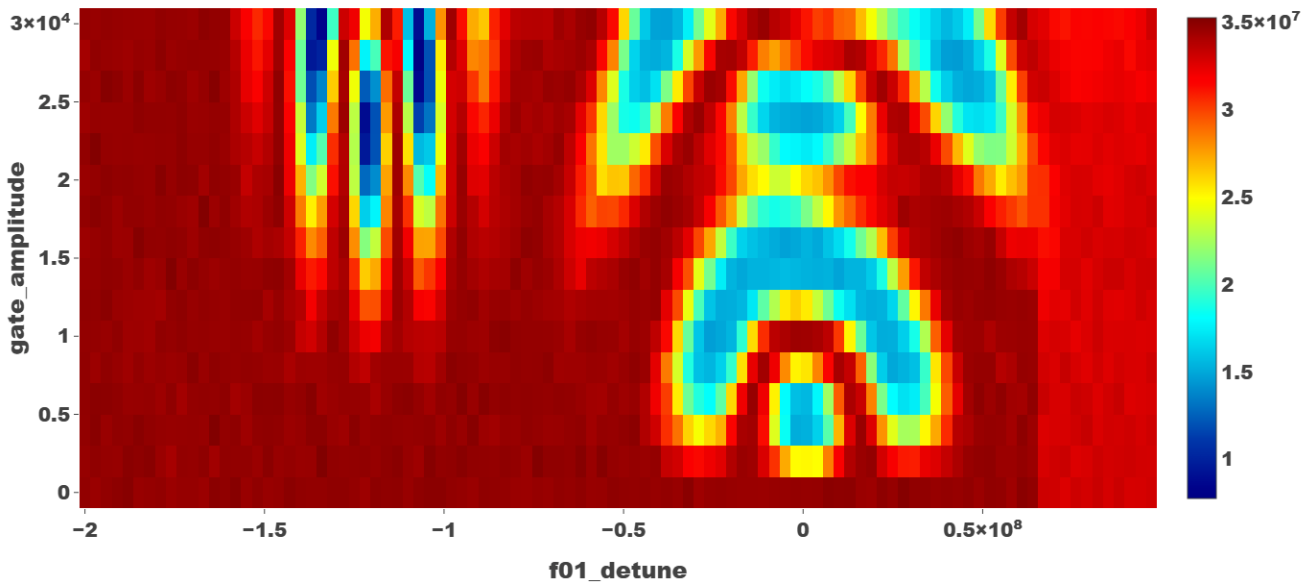
### 4.2.3 初步标定

准备阶段通过后，第一件正事是 **测准每个比特的 f01（工作频率）**。f01 准了，后面所有门操作才准。

#### 4.2.3.1 二维 Rabi

**它在干什么：**同时扫描两个量——XY 驱动频率（是否接近 f01）和驱动幅度，观察比特被打到  $|1\rangle$  的概率（信号强度）。这样能一次性把 "频率" 和 "门幅度" 的粗糙信息都看到。

## Q45 modulus



- **怎么看：**这是一张热图，横轴是频率失谐（相对 f01 的偏移），纵轴是门幅度，颜色代表  $|1\rangle$  概率。图中会看到 **左右两块明亮的图案**：左边是“双光子”特征，右边才是 f01 对应的主图案。
- **关键位置：**右边主图案的对称轴位置，对应的横坐标就是 f01。
- **作用：**这是测量 f01 最可靠的手段。把 f01 手动填进注册表后，整个标定才有真正的“锚点”。

李少伟博士论文中，5.8 图讲了一样的事情：

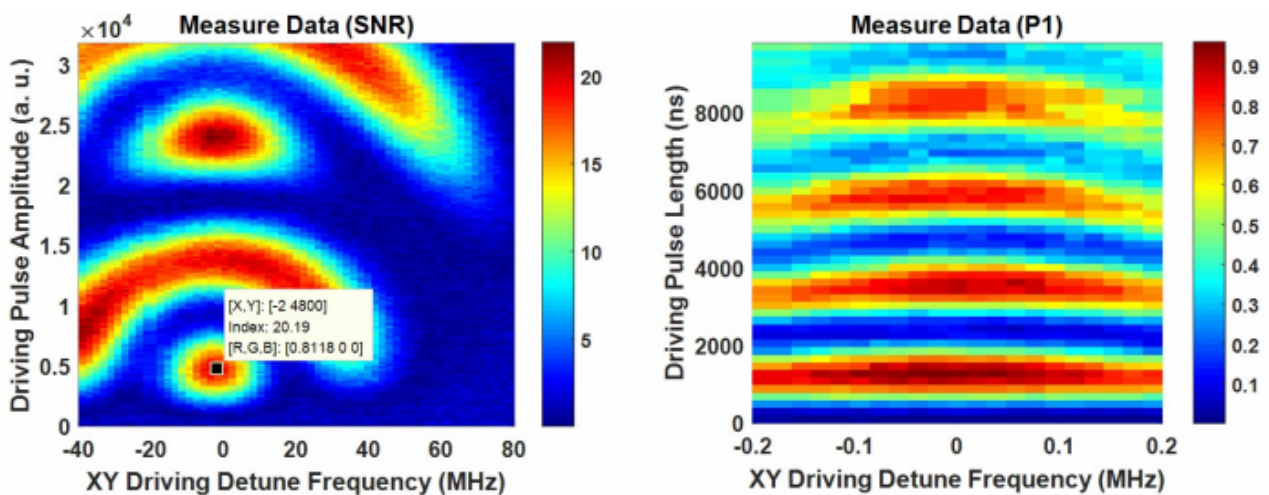


图 5.8 拉比驱动实验测试图

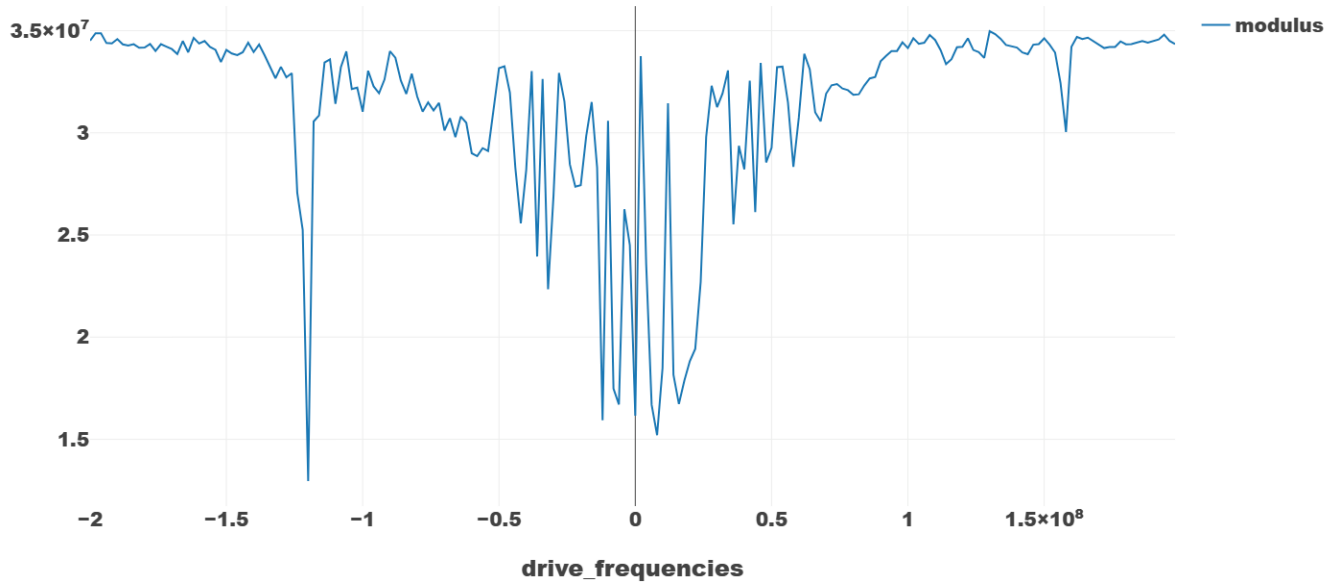
这边 XY 微波的驱动强度究竟是什么呢？驱动强度  $\Omega_d$  本质上是一种频率，也叫拉比频率，决定了量子比特状态在  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  之间翻转的快慢，不单单代表能量强度。要满足  $\Omega_d \ll \eta$  ( $\eta$  是  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  与  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  两个跃迁之间的 **频率差**)，保证只作用于 1 和 0 两个能级。简记：**推力**  $\Omega_d$ 。论文中的布居数就是概率，比如  $|0\rangle$  态的布居数是 0.8。

**论文中 5.8 图是双变量扫描：**右边的 P1 代表布居数，幅度不变，**固定驱动频率扫时长、扫频**，周期性演变，得到 **时长拉比图**；左边那个时长固定，驱动频率、幅度是多少情况下比特响应最强烈，是 **驱动频幅-响应图**。XY 波形的微波频率该调到多少、幅度大概给多少，以及  $\pi$  门、 $\pi/2$  门给多少频率、幅度、时间，都可以确定下来。

### 4.2.3.2 一维 f01

**它在干什么：**只扫驱动频率，更快，但在参数未标定时信号杂乱，很难认峰。

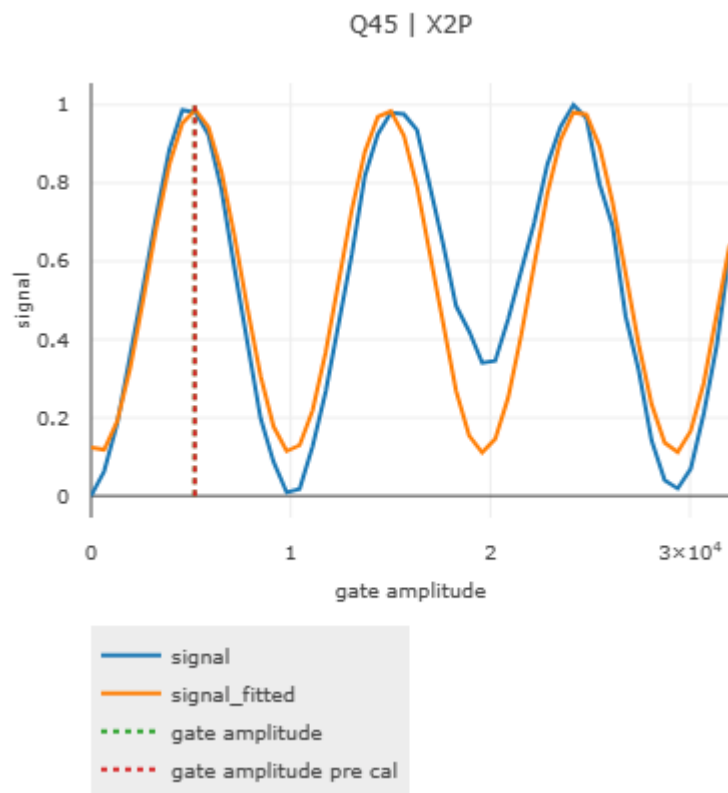
### Q45



- **怎么看**：横轴是驱动频率，纵轴是信号强度，曲线上的 **低谷（谐振谷）** 即 f01 附近。
- **关键位置**：最深的谷值。
- **作用**：作为 f01 的快速参考。因为前期图像很差（见上图对比：前期杂乱、后期清晰），所以 **不建议在初始阶段用它来定 f01**，只作辅助。

#### 4.2.3.3 Rabi01

**它在干什么**：可以测 X/2 门的幅度。在已知 f01 上，改变驱动幅度，看比特被翻转的程度，从而标定 "一个 X/2 门需要多大的幅度"。

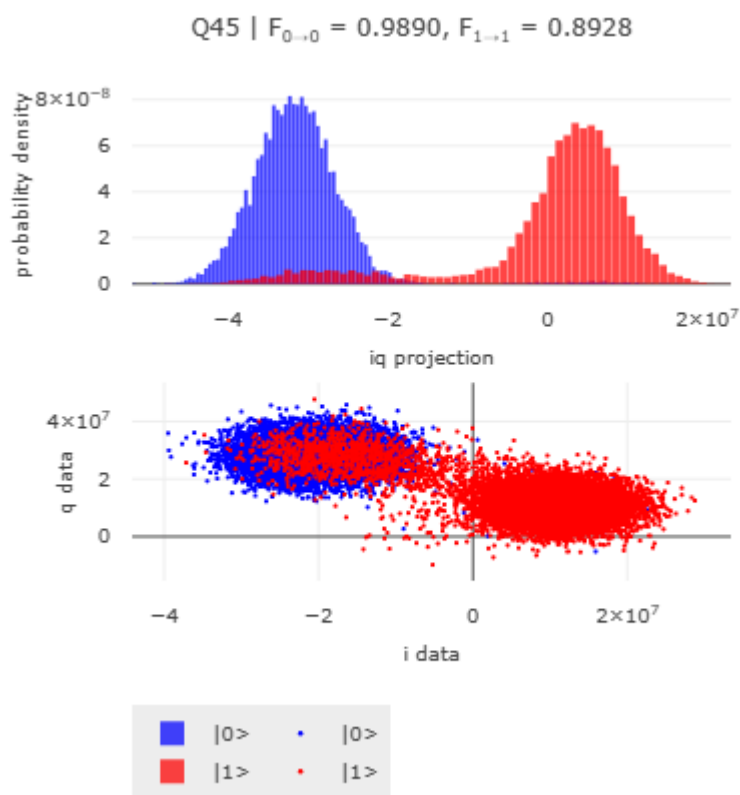


- **怎么看**：横轴是门幅度，纵轴是信号 ( $|1\rangle$  概率)。曲线呈 **周期性振荡**。

- **关键位置：第一个峰** 对应的幅度，就是 X/2 门的最优幅度（图中红色虚线预标定点约在  $0.5 \times 10^4$ ）。因为做完一个完整的 X 门，比特应该正好翻到  $|1\rangle$ 。
- **作用：**给门操作定"力道"，幅度值自动写入注册表。这一步容易拟合出错，需要人工看图确认。

#### 4.2.3.4 读取保真度

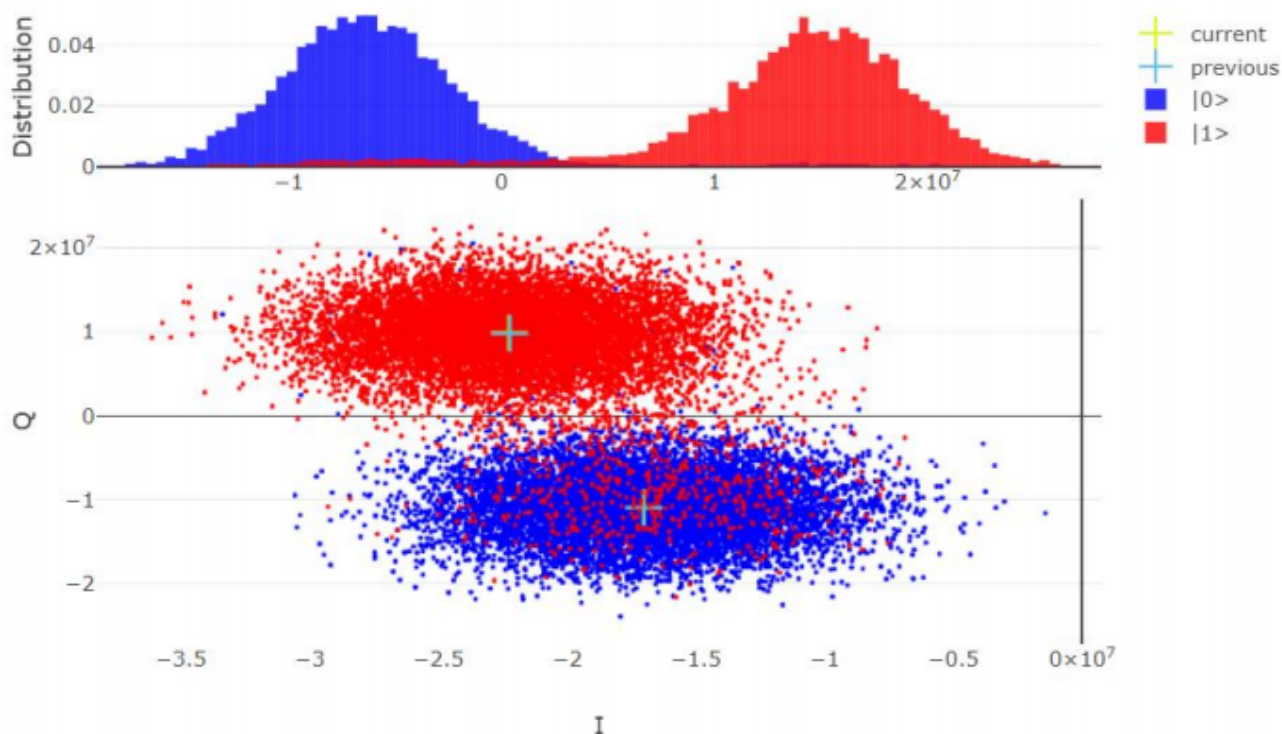
**它在干什么：**通过 IQ 球可以看"读得准不准"。把比特分别准备好到  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ ，各读很多次，看两群测量结果在 IQ 平面上能不能分开。



- **怎么看：**下方散点图中，蓝色一堆是  $|0\rangle$  态的测量结果，红色一堆是  $|1\rangle$  态的测量结果，理想情况下应形成两个分开的"球团"；上方直方图是两个态的分布曲线。**标题里  $F_{0 \rightarrow 0}$  和  $F_{1 \rightarrow 1}$  就是两种态各自的读取保真度。**
- **关键位置：**两个球团之间的**分界**位置；以及标题中的保真度数值（本例  $F_{0 \rightarrow 0} \approx 0.989$ 、 $F_{1 \rightarrow 1} \approx 0.893$ ）。
- **作用：**① 判断读取系统读得准不准；② 保真度是后面优化读取参数、评估整体的"标尺"。
- 小提示：1 态球会往 0 态上掉（门不准、退相干等原因），如果 0 态球有大量跑到了 1 态上，可能是控制线有热激发，需要排查。

在李少炜博士论文中的"量子态判断与等效热激发温度标定"小节讲了同样的事，但更为详细地分析了具体细节：

先让比特保持在基态，去测几千次，把得到的所有 IQ 点画在图上（**蓝色的点集**）。用一个刚学好的 X 门（ $\pi$  脉冲）把比特翻转到激发态，再去测几千次（**红色的点集**），得到 0、1 两个云。



为了好处理，实验员把蓝色和红色的中心点连成一条线（投影轴），把所有的点都“拍扁”投影到这条线上，这就变成了上面的直方图——**两个高斯分布（双峰）**。两个中心点的正中间画一条**中垂线**，得到一个**判断线**：只要落在分割线左边，就**一口咬定它是  $|0\rangle$  态**；落在右边，就**一口咬定它是  $|1\rangle$  态**。

**怎么标定等效热激发温度？** 虽然芯片被冷冻在 10 mK 的极低温下，但多多少少还是有点热量的。这意味着，**即便我们什么都不做（本该是纯  $|0\rangle$  态），也会有极小一部分比特因为“热骚动”自己蹦到了  $|1\rangle$  态**，蓝色的大山右侧 0 位置、中垂线右边会多出一部分。

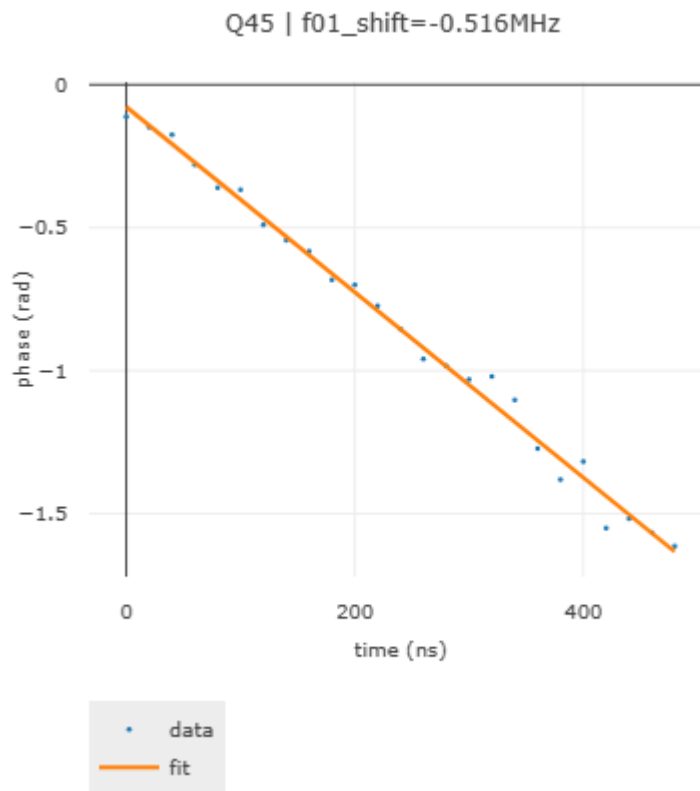
实验员通过拟合，把这部分由于热自发产生的概率  $P_{1,\text{thermal}}$  给算出来，然后套用经典的**玻尔兹曼分布公式**（即文中的公式 5.7）：

$$P_{1,\text{thermal}} \approx \frac{\exp(-hf_{01}/k_B T_{\text{env}})}{1 + \exp(-hf_{01}/k_B T_{\text{env}})}$$

因为比特频率  $f_{01}$  是已知的，通过这个公式反推，就能算出比特真正感受到的环境温度  $T_{\text{env}}$  是多少。图 5.9 最上方写着  $F_{0 \rightarrow 0} : 0.9838$  和  $F_{1 \rightarrow 1} : 0.9359$ ，意思就是“是 0 测准为 0 的概率有 98.38%，是 1 测准为 1 的概率有 93.59%”。

#### 4.2.3.5 Correct f01 by phase

**它在干什么：**可以精调  $f_{01}$ 。前面的 Rabi 只把  $f_{01}$  定到了“大致准”，这一步用相位测量把  $f_{01}$  精细校准到更准。

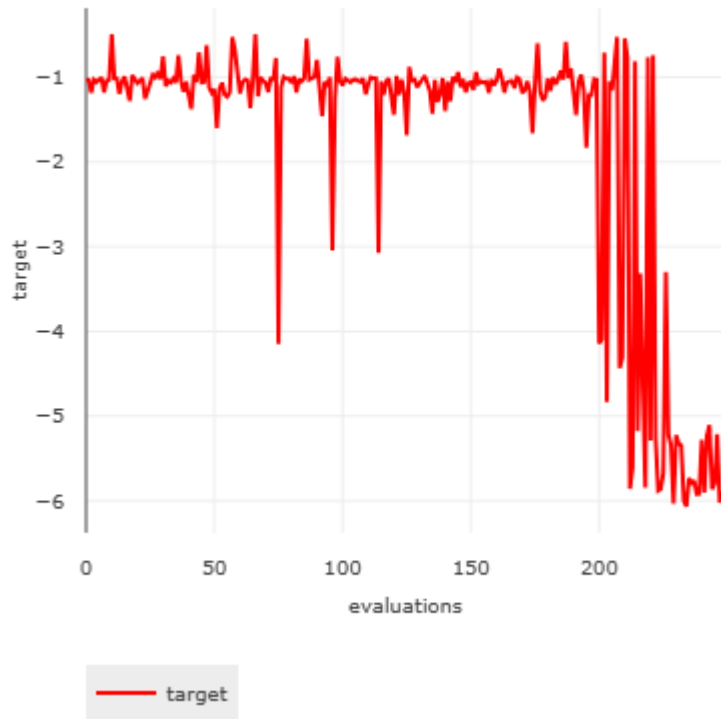


- **怎么看**：横轴是时间，纵轴是相位，数据点呈线性变化，拟合出一条直线。
- **关键位置**：**拟合直线的斜率** 对应 f01 的偏差量（图中标注 f01\_shift = -0.516 MHz），系统据此自动把 f01 校准回去。
- **作用**：把 f01 拧到 "精确"。最好连跑两遍确认收敛；f01 改动后会影响到读取，通常还要再测一次读取保真度。

#### 4.2.3.6 JPA

**它在干什么**：JPA（约瑟夫森参量放大器）是读取链路上的低温放大器。读取信号太弱，靠它把信号放大，读取保真度才能高。这一步就是给 JPA 定三个参数：偏置、微波源功率、微波源频率。

A01 | Untitled Figure



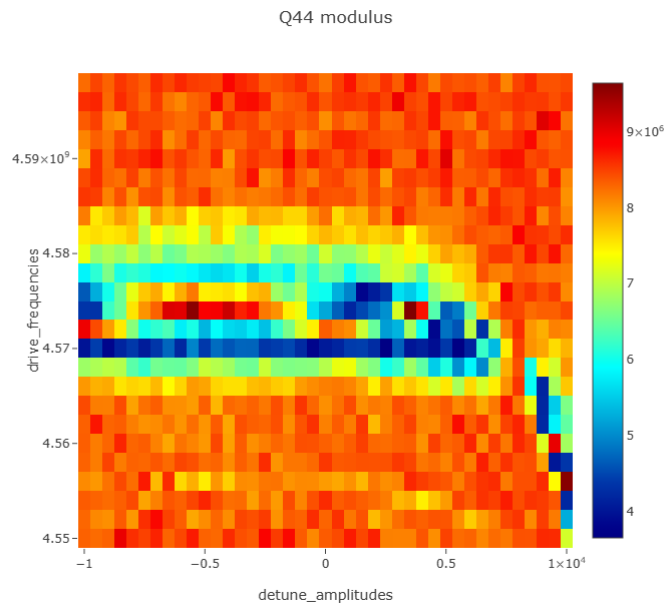
- **怎么看**：四张曲线图分别显示三个参数（偏置、频率、功率）随优化次数的变化，以及一个 target（放大效果）。参数最终都应“收敛”到稳定值。
- **关键位置**：曲线从抖动到 **收敛（变平）** 的那段，就是可用参数；target 的绝对值越大，放大效果越好。
- **作用**：把读取信号放大，让读取保真度从“凑合”提升到“可用”（通常这一轮后多数比特能达到 75% 以上）。
- **小提示**：如果 target 几乎不放大（绝对值只有 1~2），要排查 JPA 接线或直流源调制。

## 4.2.4 关断耦合器

比特之间通过耦合器相连，不处理的话它们会互相干扰。这一节的目标是 **找到每个耦合器的“关断点”**——让耦合器既不传递比特也不干扰，从而把比特一个个隔离开来。

### 4.2.4.1 交叉驱动

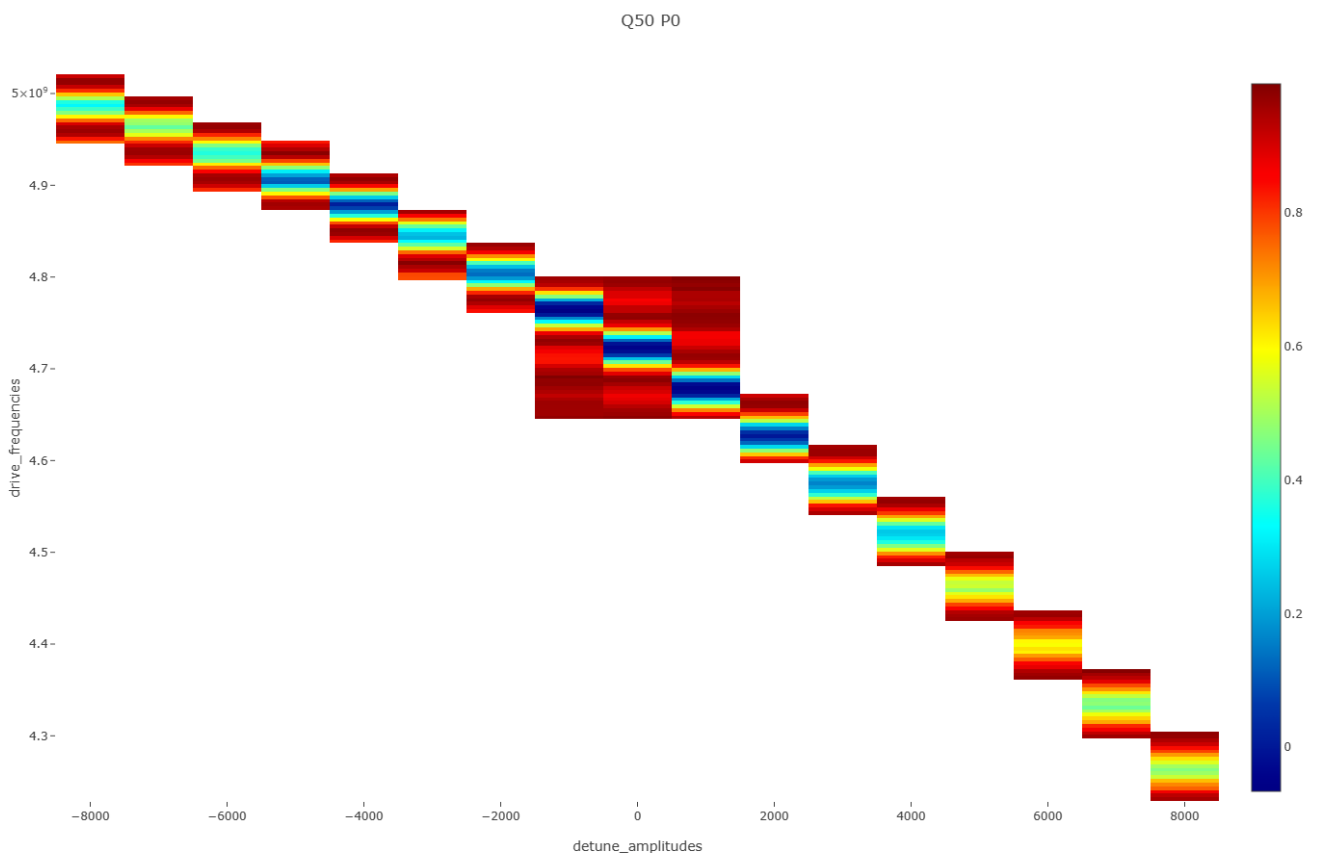
**它在干什么**：可以粗找关断点。用一个比特去驱动它相邻的比特，同时扫描耦合器偏置和驱动频率。当耦合器被“关断”时，两个比特之间的耦合会突然消失，图像上出现一个“断裂/空洞”。



- **怎么看：**横轴是耦合器偏置，纵轴是驱动频率，颜色代表响应强度。正常区域是连续图案，**关断点处会出现一条没有信号的 "空洞/断裂带"**。
- **关键位置：**图中的 **断裂带 / 空洞区** 对应的横坐标就是耦合器关断点 (本例约为 8000) 。
- **作用：**粗定每个耦合器的关断偏置。所有耦合器关断点与顶点频率的差值都很接近，这个规律在图像不清晰时可帮助判断。

#### 4.2.4.2 二维 f01

**它在干什么：**可以建立 "偏置  $\leftrightarrow$  频率" 的对应表。之前只知道某个偏置下的 f01，但标定时常常要靠 Z 偏置去精确移动比特频率，这个实验扫出 **比特频率随 Z 偏置变化的完整曲线**。



- **怎么看**：左图是扫描原图（横轴 Z 偏置、纵轴频率），右图是拟合出的  $f_{01}$  随偏置的曲线。
- **关键位置**：拟合曲线本身，它符合一个特定的映射关系（内含三个关键参数），会自动存入注册表的 `zbias2f01_mapper`。
- **作用**：以后想 "把比特频率调到某个值"，只要查这张表算出对应偏置即可。这是重排频率、控制比特频率的 "字典"。

在李少炜博士论文中 "比特共振频率的标定" 小节也有提到：

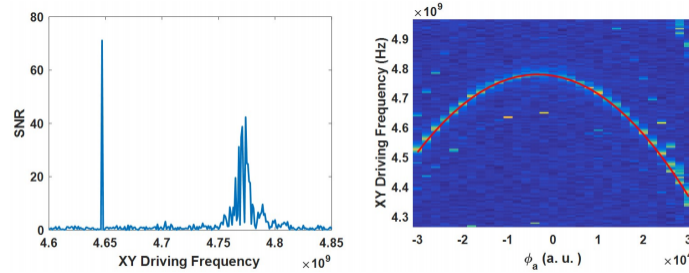


图 5.7 比特共振频率  $f_{01}$  实验测试图

用 XY 发送一个频率是  $\omega_d$  的微波，发完立马读取。如果  $\omega_d$  不等于共振频率，比特就不会理会这个波形，测出来就是 0 态；如果  $\omega_d$  刚好是共振频率，就会被吸收，变成 1 态，穿透系数变大回到基线，对应的 SNR 就会被猛猛拉高。

**SNR 越大，这个频率就是量子频率。** 简记：xy 扫频测 S21 得共振。

$$SNR(\omega_d) = \frac{|S21(\omega_d) - \text{mean}(S21(|0\rangle))|}{std(S21(|0\rangle))}$$

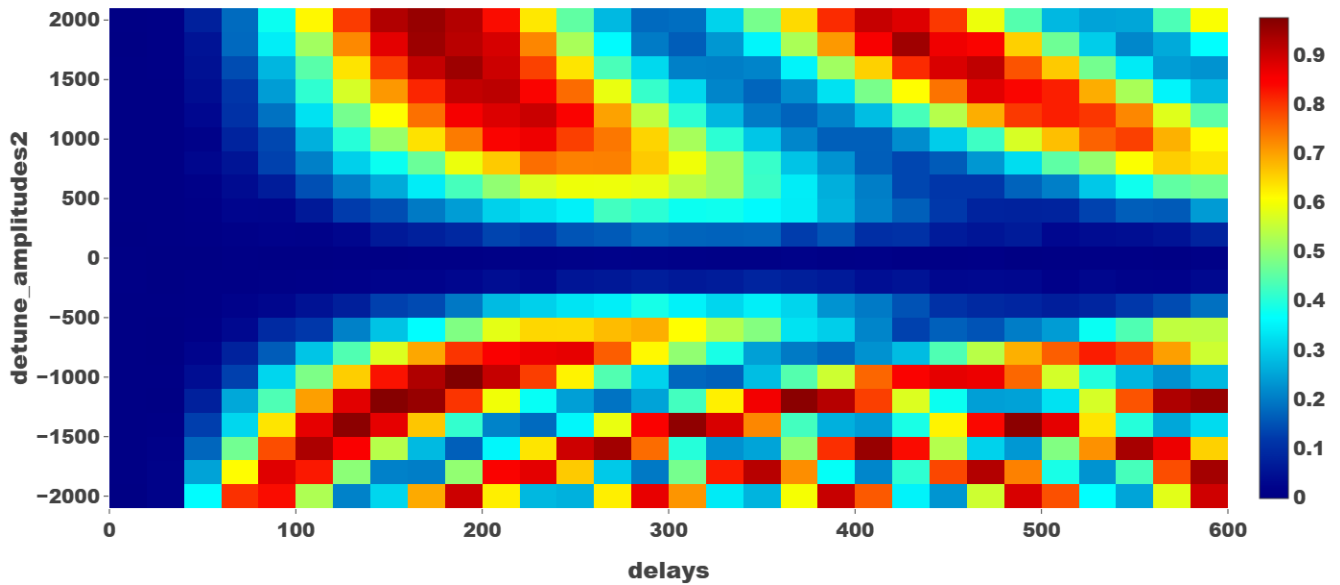
那个高高瘦瘦的峰 (4.65 GHz) 叫双光子跃迁峰 (从  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ )；那个矮一点、胖一点的峰 (4.77 GHz) 才是我们要找的比特从  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  的共振频率  $f_{01}$ 。两个峰的差值反映了 Transmon 比特的 **非简谐性**。

5.7 右边的是 Z 线幅度和 XY 微波频率的扫描，亮点就是 SNR 大的地方，就是比特共振频率，所以看出 Z 线很明显的在改变频率。**简单记作：固定 Z 扫 XY 频率，扫 Z 得图，就是 Z-f01 映射图**，其实就是找 Z-f01 映射，和这边的是一样的。

#### 4.2.4.3 QSwap

**它在干什么**：可以精扫关断点。交叉驱动只给出 "大致" 关断点，这一步更精细：让两个比特处于  $|1\rangle$  和  $|0\rangle$ ，靠耦合让它们在  $|10\rangle$  和  $|01\rangle$  之间 "摇摆" (Swap)，扫描耦合器偏置和交换时间。

### Q38,Q44 P01



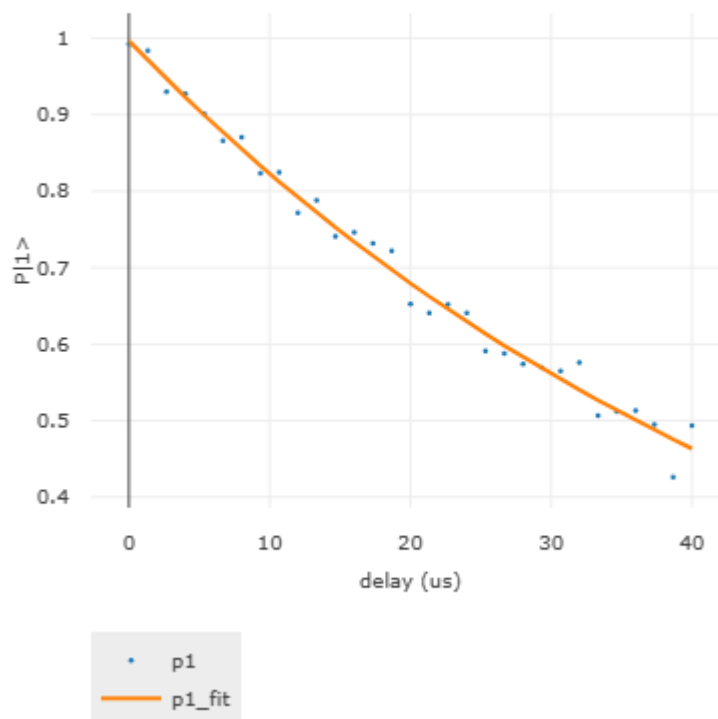
- **怎么看：**横轴是交换时间 delay，纵轴是耦合器偏置，颜色代表  $|01\rangle$  概率。图像中 **有一段完全没有信号的空白区**。
- **关键位置：**空白区对应的偏置 (0 附近) 就是精确关断点。
- **作用：**把耦合器关断点标得更准，填入注册表。关断后比特再次互相隔离，之后需重新从 f01 开始标一遍门。

#### 4.2.4.4 T1 和 T2\*

这两个参数可以相当于比特的 "寿命" 与 "相干时间"，是衡量比特质量的两个关键指标，也是后面 **排布频率（选哪些频点工作）** 的重要依据。

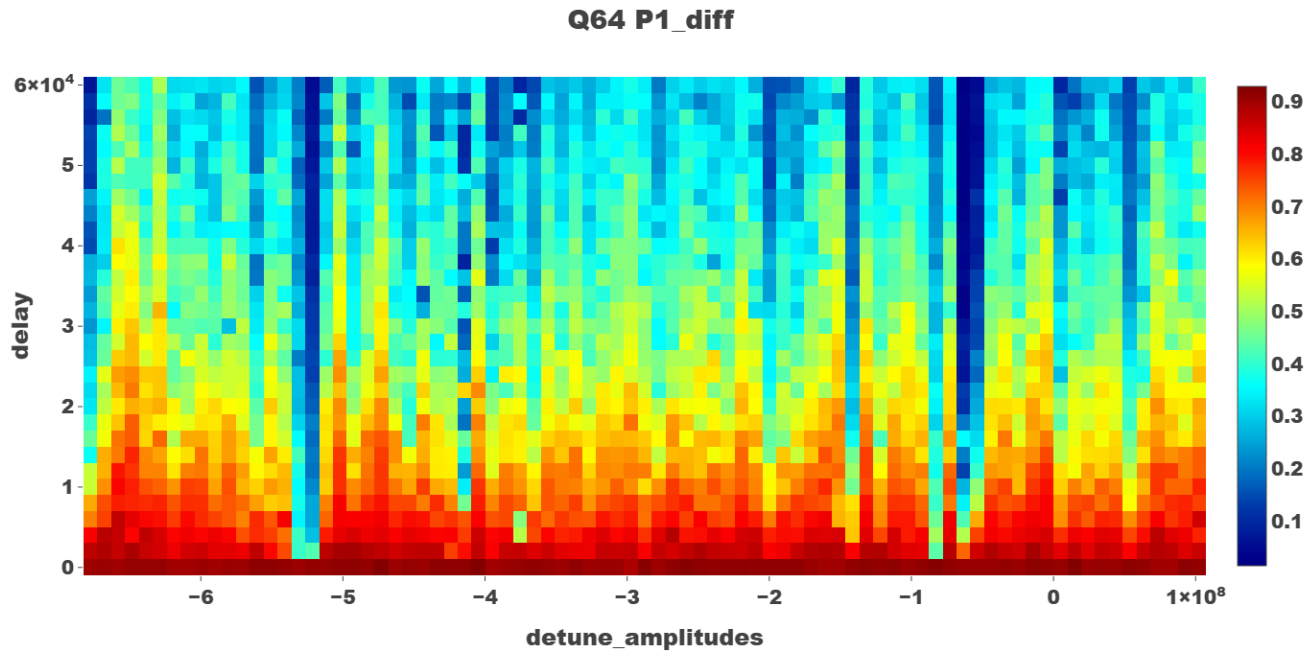
**T1（能量弛豫时间）：**把比特打到  $|1\rangle$ ，看它多久自然掉回  $|0\rangle$ 。

Q44 | T1\_idle = 52.2750 us



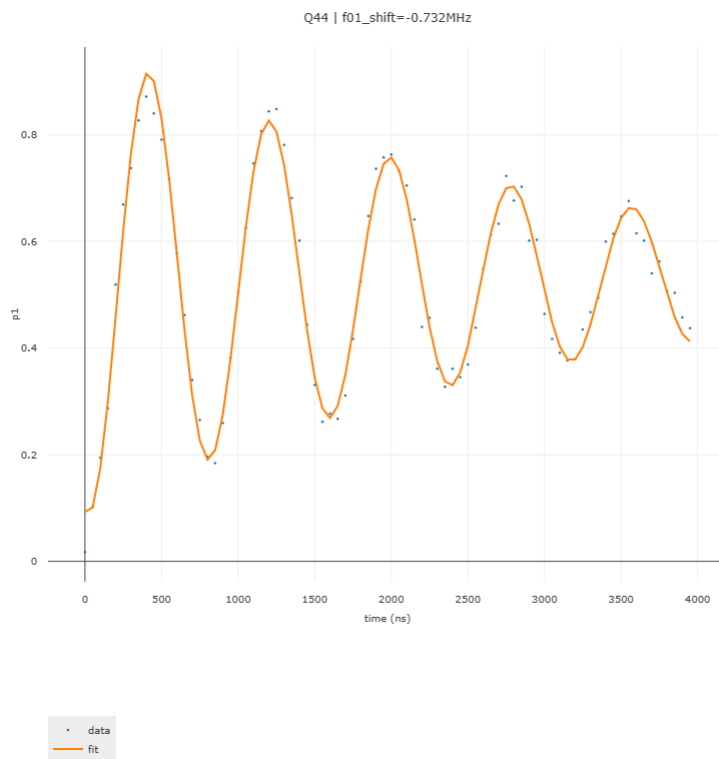
- **怎么看**：横轴是等待时间 delay，纵轴是  $|1\rangle$  概率。曲线从接近 1 指数式下降。
- **关键位置**：拟合出的 T1 数值（本例 T1\_idle = 52.3  $\mu\text{s}$ ）。**T1 越大越好**，表示比特能 "记住" 状态越久。

**二维 T1**：扫描不同频率下的 T1，用于排布频率。



- **怎么看**：横轴是频率，纵轴是 delay，颜色代表  $|1\rangle$  概率。某些频点上会出现 **向下延伸的 "坑" (暗条纹)**，那是 TLS（二能级缺陷）造成的 T1 恶化。
- **关键位置**：**避开那些 "坑"**，尽量选择 T1 大、颜色亮的频点来工作。

**T2\* (相位弛豫时间)**：比特叠加态的相位保持时间。



- **怎么看**：横轴是时间，纵轴是  $|1\rangle$  概率，曲线是 **衰减的振荡**。
- **关键位置**：振荡衰减的幅度/周期。T2\* 在接近比特频率最大值处表现最好，频率离最大值越远越差（见二维

T2\* 图)。

- **作用：**T1、T2\* 一起为 "把比特安排到哪个频率" 提供依据，避免把比特放在容易退相干/有缺陷的频点上。

## 4.2.5 单比特门标定

比特隔离好了、频率能精确控制了，这一节专门打磨 **单个比特的门操作**，目标是让单门保真度尽可能高。

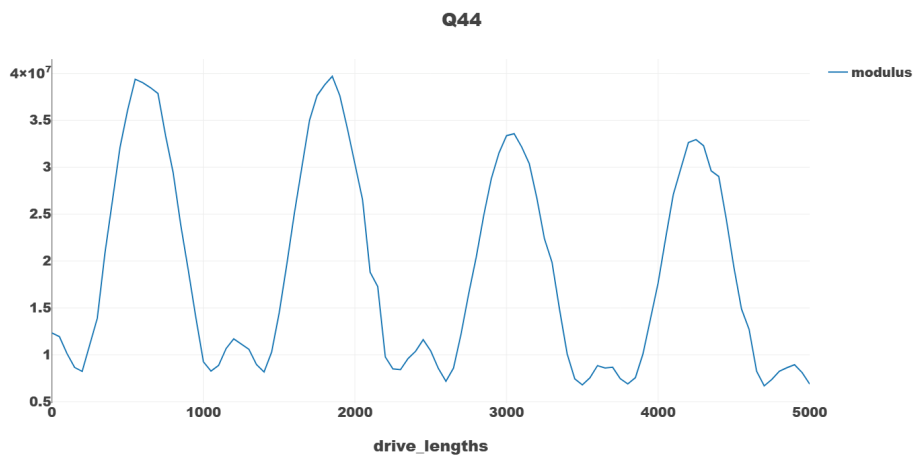
### 4.2.5.1 串扰标定（重排频率）

把整个芯片上所有比特安排到经过挑选的、互不干扰且性能好的频率点上。要做的事包括：

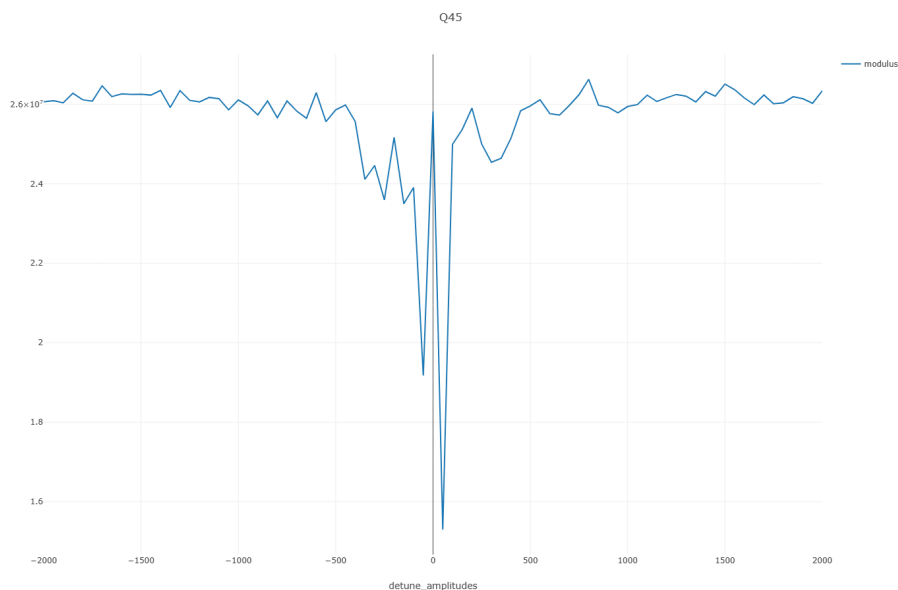
- **制作 串扰矩阵：**测出每个比特驱动自己、驱动相邻、驱动次相邻时的影响，整理成一个矩阵，用来补偿比特之间的串扰；
- **按新频率找工作偏置：**把新排布的 f01 填进注册表，再根据前面的 "频率 ↔ 偏置" 字典算出对应的 Z 偏置。

陈丹凝工程师在标定流程中的图是如下这样写的，具体我不在这边解释了，想深入了解看她的笔记。

重排后频率全变了，所以 **又要从 X 门幅度开始重新标一遍**。标定就是这样：一个参数动了，往往要重跑一串。



如图所示，记录振荡周期。完成所有串扰实验后，统计所有串扰驱动周期，并整理成矩阵，使行数表示被驱动比特（例如第一行对应 Q00 被驱动），列数表示驱动比特（第一列表示 Q00 驱动其他比特），使每一项的数值为：该行对应的被驱动比特驱动自身的周期 / 该列驱动比特驱动该行比特的周期。最终得到一个对角线上所有项为 1、其他非对角线项小于 1 的矩阵。删除未使用的比特所对应的行列。周期太长无法辨认/完全无法驱动/未进行测量的，这几种情况周期统一记为 30000。



图中  $f_{01}$  和工作偏置几乎完全相对应，误差很小，可以不对工作偏置做修改。流程在这一步，比特有了新的  $f_{01}$ ，所以要重新开始从 X 门幅度开始标定，运用类似 2.7 的方法自动循环标定相关参数。其中因为 X 门标定容易报错，最好在有人值守的情况下先标定 X 门，再自动循环完成读取参数调整、 $f_{01}$  精细校准和读取保真度标定。通过在 XY 的 RFout 端增减衰减器，使每个门幅度保持在 10000 多码值。另外还需重新测量二维  $f_{01}$ ，用 QQSwap 检查耦合器关断，调整关断数值后再回到标定  $f_{01}$ 、X 门和保真度等，过程比较繁琐和反复，需要细心和耐心一步一步完成，避免出错。

在李少炜博士论文中，有着更详细的描述。

**有 1 个小节专门讲了控制线串扰性能：**在超导量子芯片上，每个比特都有负责转动的 XY 线、负责调频的 Z 线、读出线。因为物理空间挨得极近，哪怕做了屏蔽，**一根控制线上的电磁信号也会不可避免地“漏”到旁边的比特上**，这就是串扰。信号线挨太近了没办法的，我们要能知道有多少串扰。

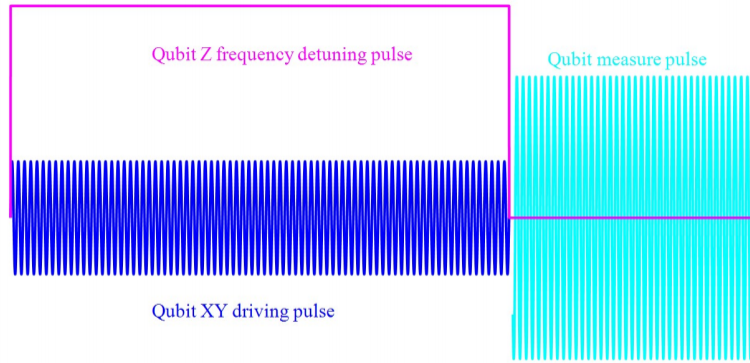


图 5.13 利用时间拉比测量微波串扰强度

**XY 线的串扰：**如果我们要测试“驱动比特  $Q_{drive}$ ”的 XY 控制线，对“目标读取比特  $Q_{read}$ ”产生了多大的微波串扰，要用时间拉比法测量。显然， $Q_{drive}$  的 XY 控制线完全没有接触到目标读取比特  $Q_{read}$ ；如果把微波送给  $Q_{drive}$ ， $Q_{read}$  起反应了，代表有串扰。

- **施加驱动：**在  $Q_{drive}$  的 XY 控制线上，输入一个频率正好等于  $Q_{read}$  固有频率 ( $f_{01,read}$ ) 的微波脉冲；
- **微观现象：**理论上这个微波是送给  $Q_{drive}$  的，但由于  $Q_{drive}$  的频率已经被推开了，它对这个微波毫无反应；
- **串扰发生：**然而因为控制线之间有串扰，这个微波信号会 **泄露** 一部分到  $Q_{read}$  的控制线上，而这个泄露微波的频率刚好和  $Q_{read}$  共振， $Q_{read}$  就会开始被迫做 **拉比振荡 (Rabi Oscillation)**；
- **数据提取：**泄露过去的微波强度（串扰强度）越大， $Q_{read}$  荡得就越快。我们通过测量  $Q_{read}$  的拉比振荡周期  $T_{rabi}$ ，就能知道漏过去了多少能量。

就是把本该驱动  $Q_{read}$  的微波，放在和它毫不相干的其他比特的 XY 线上，看  $Q_{read}$  会不会起反应。拉比越剧烈，串扰越强。

给了两个公式具体标定：通过遍历所有比特，可以测出一个二维矩阵列表  $T_{rabiList}$ ，其中元素  $T_{ij}$  表示在第  $i$  个比特控制线加驱动时，第  $j$  个比特发生的拉比周期。文献给出了两种计算串扰强度的公式：

1.  $XYCrosstalk_{ij} = T_{ij}/T_{ii}$
2.  $XYCrosstalk_{ij} = T_{ij}/T_{jj}$

都有优有劣。

**Z 线的串扰：**Z 控制线里面走的是电流/直流偏置，它产生的串扰本质上是 **线圈之间的互感 (Mutual Inductance)**。在  $Q_{drive}$  的 Z 线上通电流，产生的磁场漏到了  $Q_{read}$  的超导量子干涉器 (SQUID) 磁通回路里，导致  $Q_{read}$  的频率发生了原本不该有的漂移 (**Z 漏磁通导致频率偏移**)。

- **施加偏置：**在  $Q_{drive}$  的 Z 线上施加一个已知的电流偏置  $I_{drive}$ ；

- **读取响应**: 测量目标比特  $Q_{read}$  此时受到的 **磁通偏移量**  $\Delta\phi_a$  (因为频率变了, 可以通过相位或者特定谱线测出磁通改变量);
- **计算互感**: 定义串扰互感矩阵元素为

$$MCrosstalk_{ij} = \frac{\Delta\phi_{a,j}}{I_{drive,i}}$$

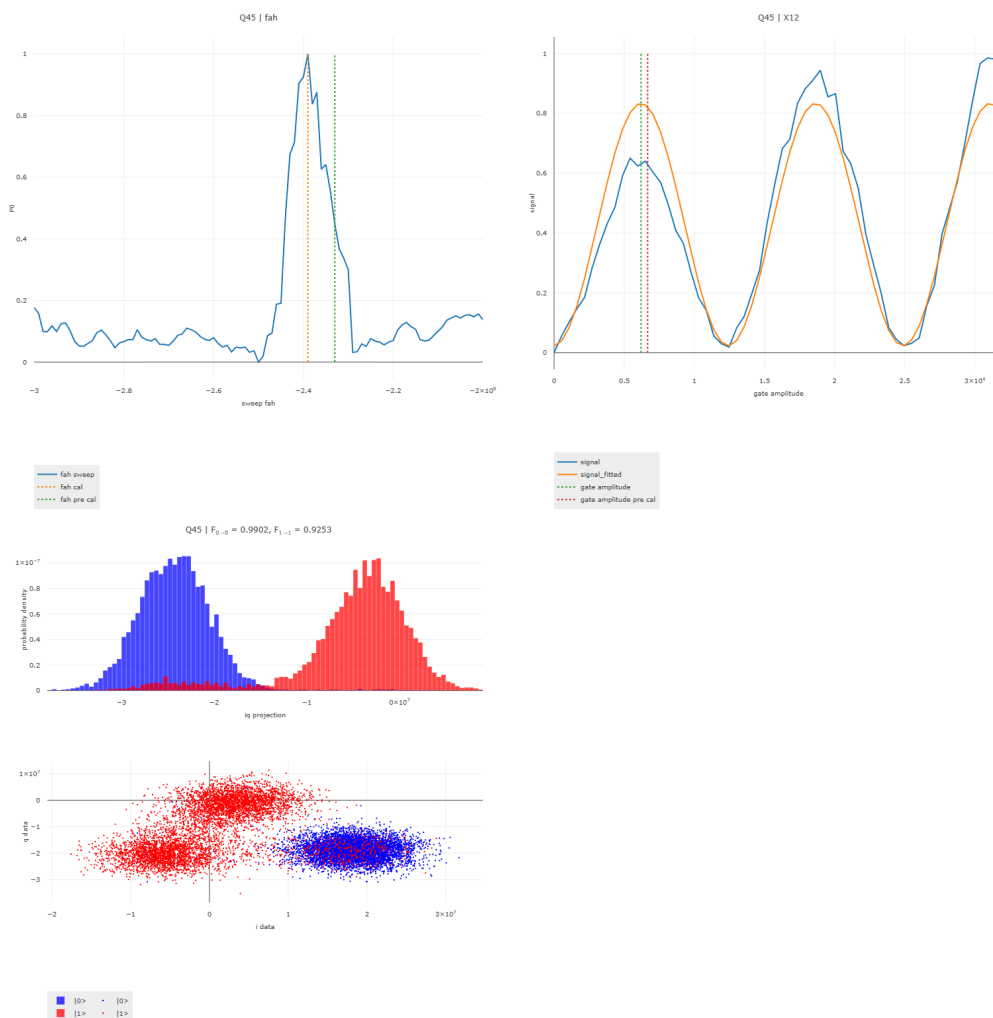
这个值直接量化了 "每单位控制电流会错误地给隔壁比特带去多少磁通"。

测出这些 XYCrosstalk 和 MCrosstalk 矩阵后, 软件算法会在后台对它们进行 **求逆矩阵 (Crosstalk Matrix Inversion)**。在后续真正执行量子门操作时, 通过在硬件上主动施加一个反向的 "补偿信号 (Crosstalk Cancellation)", 就能把这些泄露的串扰精确地抵消掉。所以标定得准能减少串扰的影响。

#### 4.2.5.2 fah 与 Rabi12

**它在干什么**: 可以提升读取保真度。读取时把比特的  $|1\rangle$  态先打到  $|2\rangle$  态上, 让读取分辨 "0 和非 0" 而不是 "0 和 1", 从而延长非 0 态停留时间、提升保真度。fah 找 f12 频率, Rabi12 标定  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  的门幅度。

做完后, 读取波形时序里会多一步 "先把 1 态打成 2 态"; 此时 IQ 图上 "非 0 态" 出现两个球 (1 球和 2 球分开) 是正常现象。具体图见《超导量子计算机标定流程——陈丹凝》中的 4.2 小节。

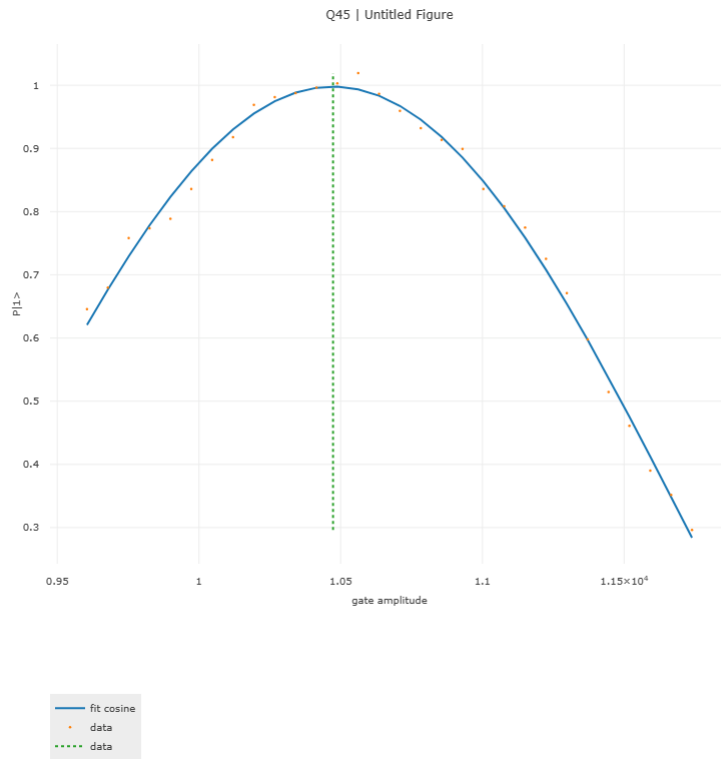


#### 4.2.5.3 精细校准门幅度

**它在干什么**: 前面 Rabi01 只粗定了门幅度, 这一步通过 **叠加多个 X 门** (把单门误差放大) 来更精细地校准幅度。

- **怎么看**: 扫描门幅度, 拟合出  $|1\rangle$  概率的峰值, **峰值 (P1 接近 1) 对应的幅度就是最优值**。
- **作用**: 让门操作 "力道" 精确到误差很小。

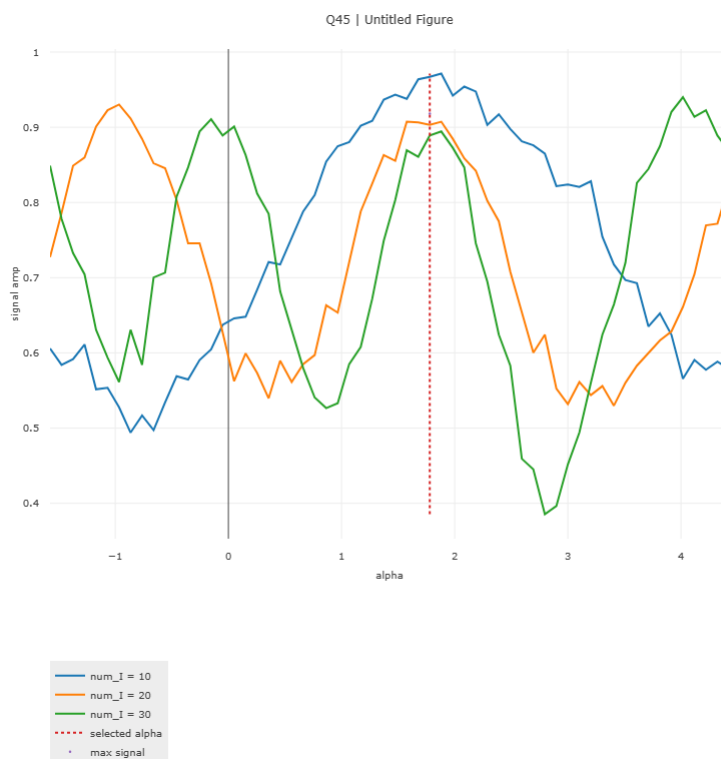
- 具体见《超导量子计算机标定流程——陈丹凝》中的 4.3 小节。



#### 4.2.5.4 DRAG

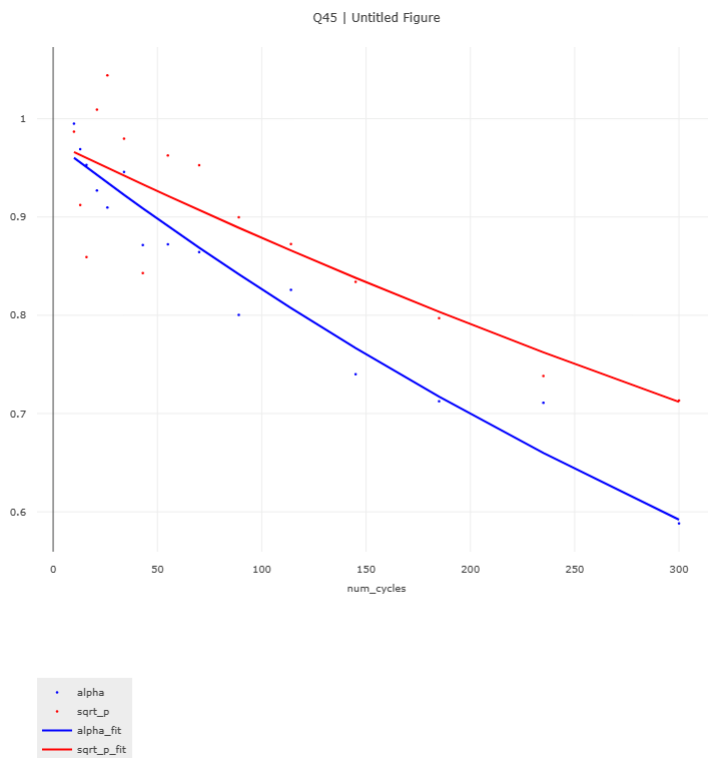
**它在干什么：**给门波形叠加一个修正项（权重  $\alpha$ ），消除门操作带来的相位误差。

- **怎么看：**扫描  $\alpha$ ，找到使  $|1\rangle$  概率达到最大的  $\alpha$  值；无论叠加多少个 I 门，最优  $\alpha$  都一致。
- **关键位置：**峰值对应的  $\alpha$ （一般 -2 到 2 之间）。 $\alpha$  若过大，后面 XEB 会异常；出错时先把注册表里的 drag 归 0 再重测。
- 具体见《超导量子计算机标定流程——陈丹凝》中的 4.4 小节。



#### 4.2.5.5 单比特门 XEB

**它在干什么：**可以检验门做得好不好。用随机门序列，统计 "门循环次数" 增加时保真度怎么衰减，从而测出 **单比特门的保真度（错误率）**。



- **怎么看：**横轴是门循环次数，纵轴是保真度相关量；点会随循环次数的增加而 **衰减**，拟合曲线越平缓越好。标题或输出里会给出 XEB error、SPB error。
- **关键位置：**拟合得到的**错误率**。单比特 XEB error 一般应小于 1%，最好在 0.5% 以下。
- **怎么看异常：**红、蓝两条线都衰减很快变成直线 → 误差来自退相干，考虑换频率；只有一条衰减快 → 误差来自控制，需回头检查（尤其 Drag）。
- **作用：**这是单比特标定的 "总验收"，达标后单比特标定完成，可全并行运行。

#### 4.2.5.6 关联读取

**它在干什么：**检查比特之间读取串扰——检查一个比特处于 0/1 态时，会不会影响其他比特的读取结果（读取串扰）。

- **怎么看：**看每个比特 "在其他比特处于 0 态 vs 1 态时" 读取概率的差值，目标是把所有差值控制在 **10% 以内**。
- **作用：**定位并消除读取串扰的来源（可能是某比特读取幅度过大激发邻居，需调小并重标定）。这一步很耗时、很依赖经验。

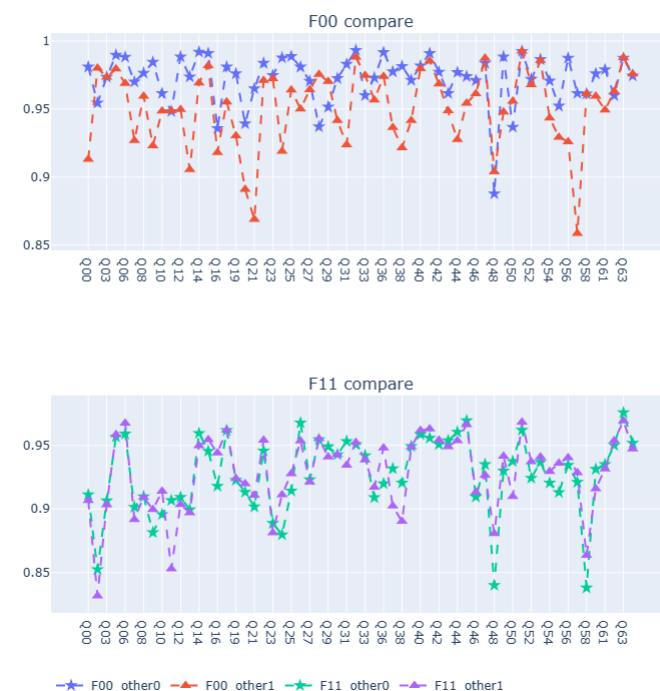
(a) 其他比特 0/1 态时比特在 0/1 态时测得 0/1 态概率差

Q00 | Fidelity diff



(b) 其他比特 0/1 态时比特在 0/1 态时测得 0/1 态概率值

Q00 | Fidelity compare



b 图中，F00 compare 中蓝色点表示其他比特在 0 态时比特处于 0 态且测得 0 态的概率，红色点表示其他比特在 1 态时比特处于 0 态且测得 0 态概率；F11 compare 中绿色点表示其他比特在 0 态时比特处于 1 态且测得 1 态的概率，紫色点表示其他比特在 1 态时比特处于 1 态且测得 1 态概率。a 图则显示了 F00 compare 和 F11 compare 中概率的差值。我们的最终目标是将所有差值都控制在 10% 以内。

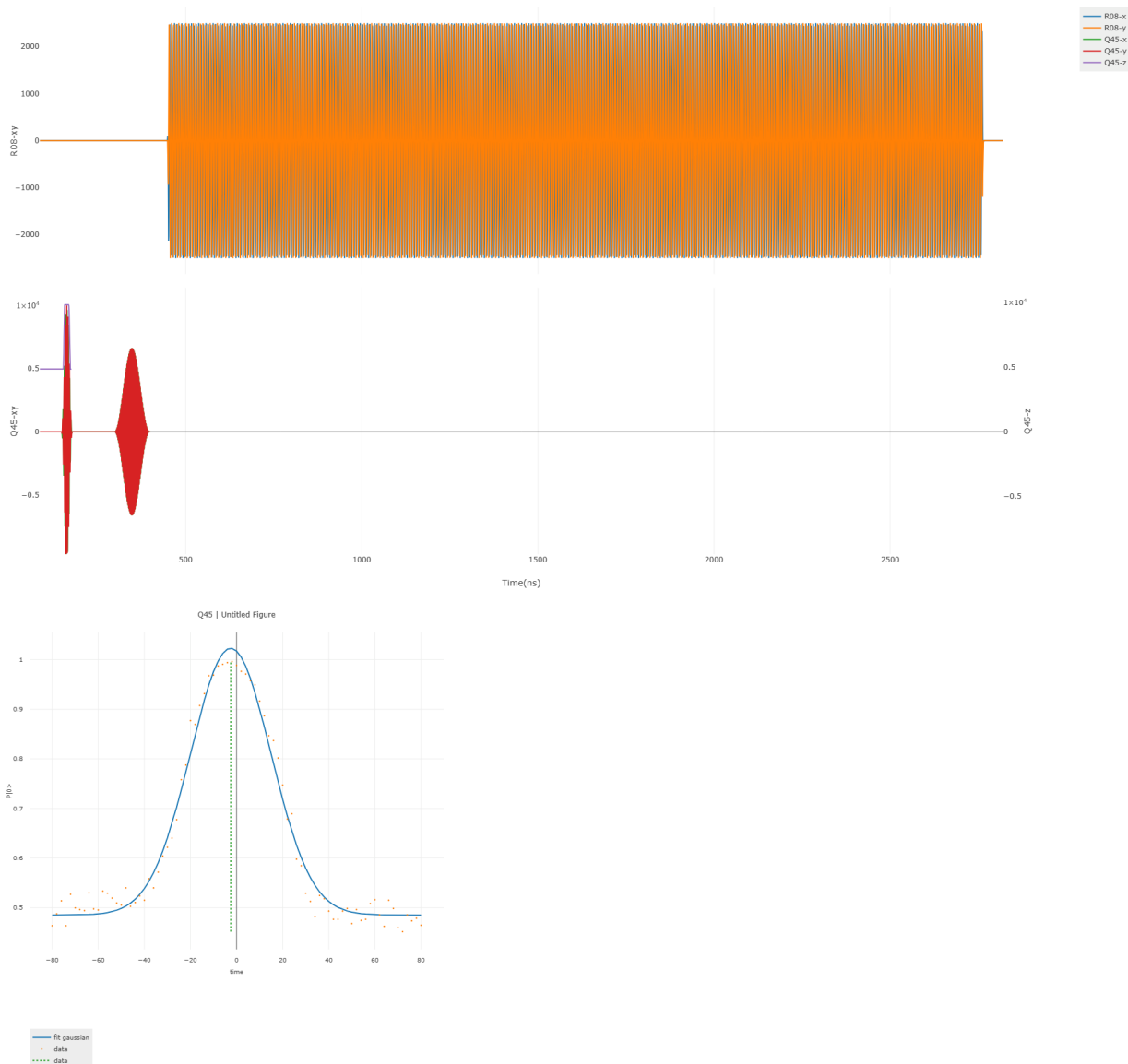
## 4.2.6 两比特门标定

单门做好了，最后是做 **两比特门 (CZ 门)**。有两种主流方案：**直流门**（保真度高但耗时）和 **交流门**（相对简单但保真度略低）。

#### 4.2.6.1 XYZ timing

**它在干什么：**可以把时序对齐。做两比特门前，先校准各种波形之间的 **时间对齐**（XY 与 Z、比特与耦合器），避免波形错位导致操作错误。这一步是两种方案的共同前提。

原理：让比特上 X 门和 Z 波形的相对时间差变化，当两者对齐时，Z 偏置恰好把比特频率带远、X 门 "失灵"，测出 P0 最大对应的时差即为正确时序（拟合的绿色虚线处）。



(a) 波形时序图（Z 偏置波形为紫色）(b) 扫描拟合图

**比特 XYZ timing：**扫描 X 门和 Z 偏置的相对位置。

这一小节可以看李少炜博士论文的 5.3.1 小节：

### 5.3.1 比特时序对齐

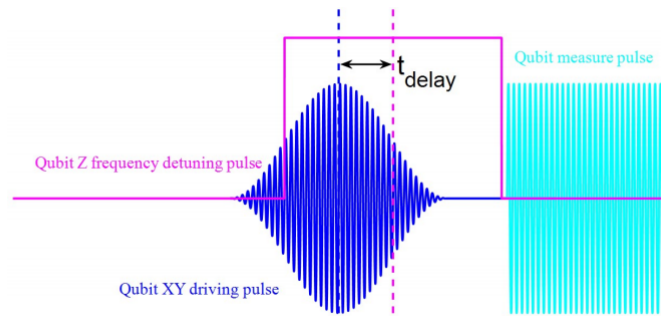


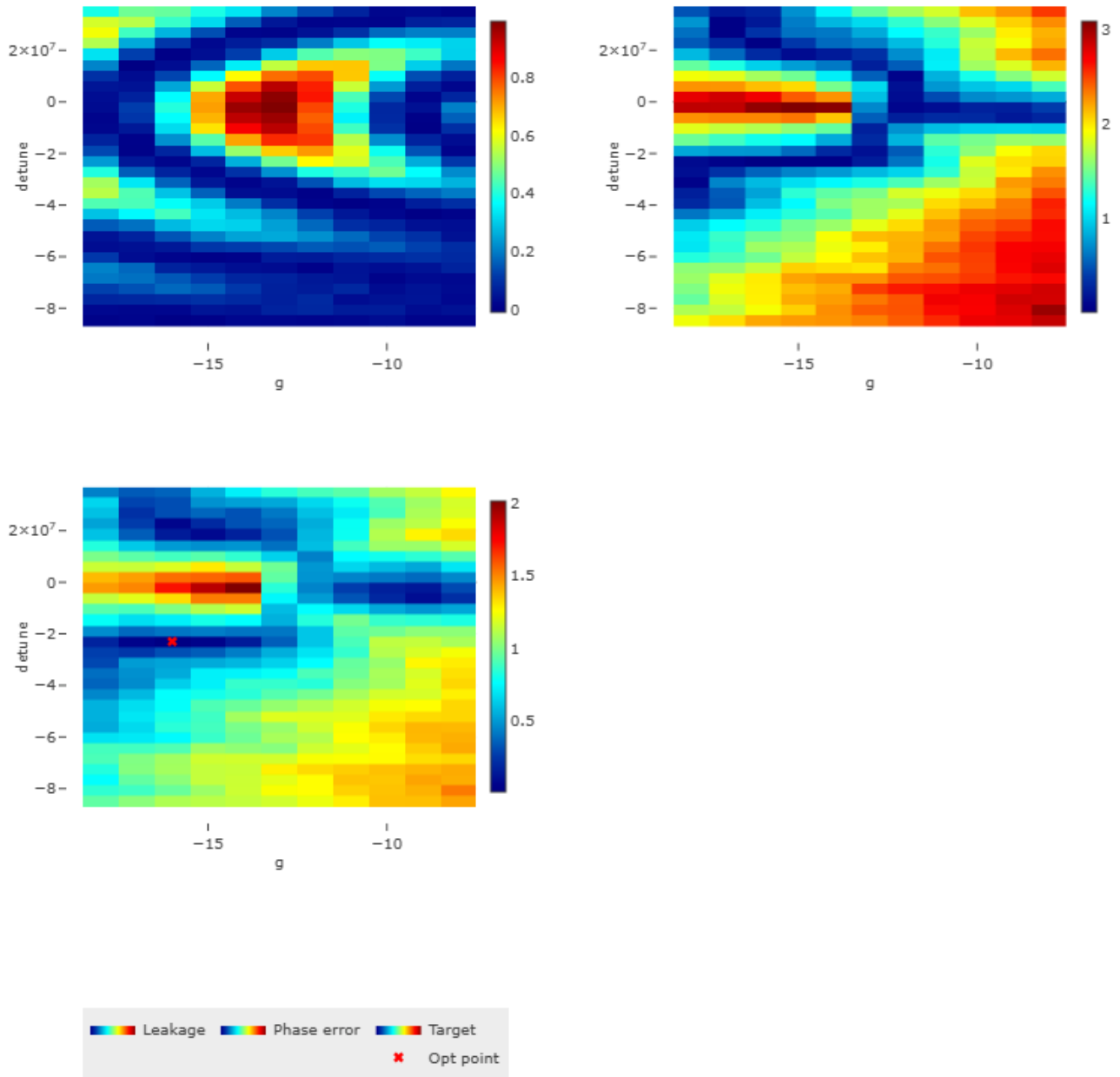
图 5.15 测量控制线时序波形示意图

### 4.2.6.2 直流门

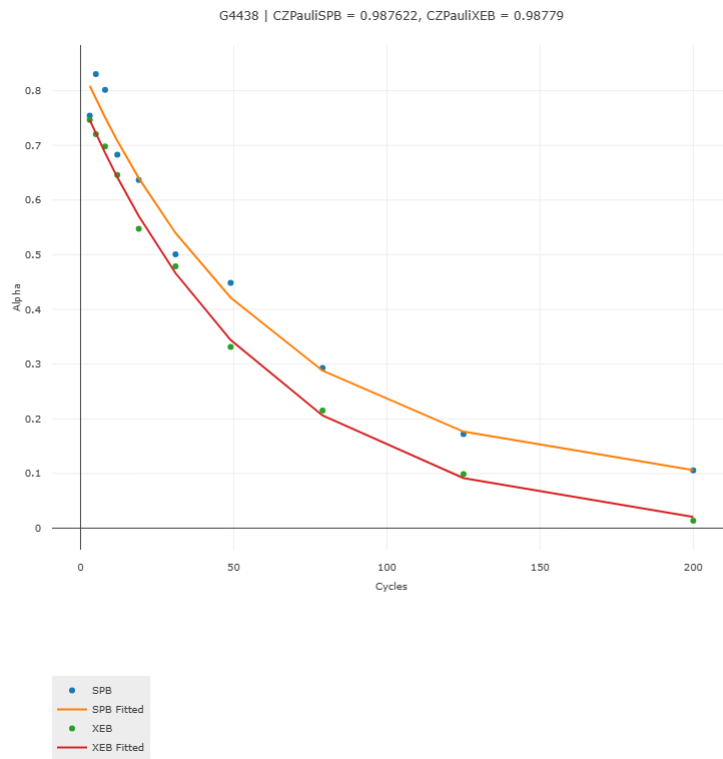
直流门通过连续调节耦合器与比特的频率进入共振，实现受控相位门。流程较长：

1. **拖尾矫正**：校准 Z 波形的 "尾巴"（脉冲结束后残留的相位漂移）。判断标准：response 平滑单调递减到 0，phase 散点分布在 **-0.2 到 0.2 之间**；
2. **耦合强度 vs Z**：测耦合强度  $g$  随偏置的变化，作为门操作的 "强度字典"；
3. **Rough Point**：粗扫定位门工作点（频率 detune 与耦合强度  $g$ ）。

G4438 | Untitled Figure



- **怎么看：**三张热图分别是 leakage（泄露到  $|2\rangle$  态的概率）、phase error（相位误差）、cost function（综合指标）。
  - **关键位置：**左下 cost function 图中的红叉（Opt point）——同时满足相位误差小、泄露小的最佳点，系统自动填入注册表。
4. **粗扫 detune / 粗扫 g：**固定一个量、扫描另一个，进一步逼近最优工作点；
  5. **CZ XEB：**最终用随机基准测两比特门保真度。

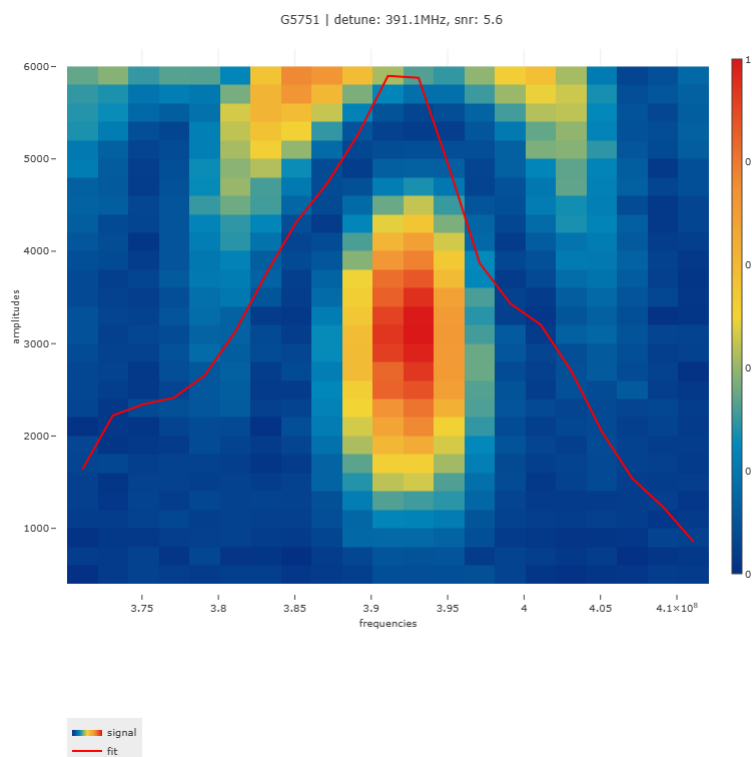


- **怎么看**：横轴是门循环次数，纵轴是保真度，SPB 和 XEB 两条拟合曲线越平缓越好。
- **关键位置**：标题中的保真度数值（本例 CZPauliSPB $\approx$ 0.988、CZPauliXEB $\approx$ 0.988）。**目标：四组耦合器分别并行时平均保真度超过 98%。**

#### 4.2.6.3 交流门

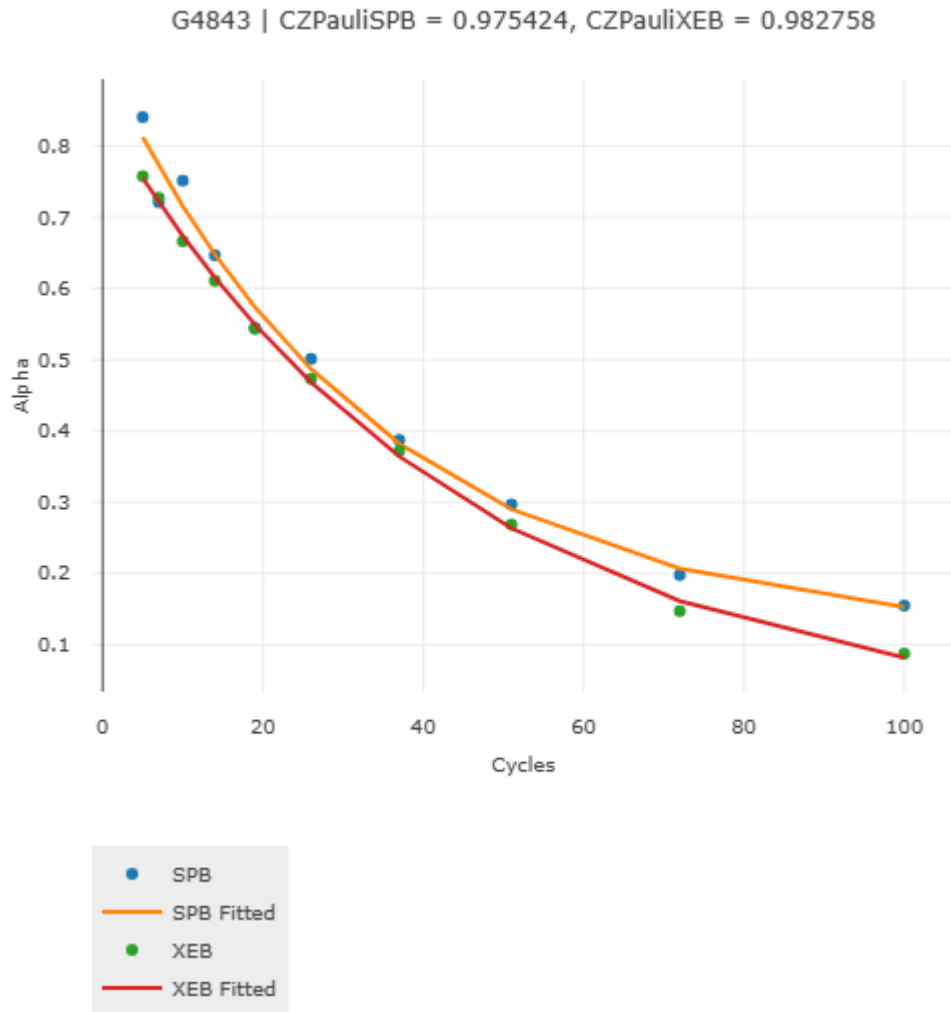
交流门不连续调节，而是用一段特定波形的微波脉冲驱动耦合器实现 CZ 门，流程更短：

1. **Rough Point (找频率)**：扫描耦合器频率与幅度，找到频率工作点。



- **怎么看**：横轴是频率，纵轴是幅度，图中能看到  $|11\rangle$  与  $|20\rangle$  之间的交换图案（类似二维 Rabi）。

- **关键位置**：图案的对称中心/对称点，自动拟合为工作频率（图中红叉处，标题给出 detune 与信噪比 snr）。
- 2. **粗扫幅度**：扫描门幅度，找到 leakage（泄露）最小的幅度，且无论做几个 CZ 门都收敛到同一幅度；
- 3. **粗扫频率**：在粗定频率附近精扫，找到 phase error 最小的频率；
- 4. **CZ XEB**：最终验收。



- **怎么看**：同直流门，看 SPB / XEB 保真度（本例约 98.3%）。
- **关键位置**：标题中的保真度数值，目标同样是接近 98%。

**直流 vs 交流怎么选**：若对保真度要求高（平均 > 98%）且时间充裕，用 **直流门**；若时间紧、目标在 98% 或以下，用 **交流门**。

## 4.2.7 性能标定

这一小节参考李少炜博士论文。

### 4.2.7.1 退相干性能的标定

#### 1. 能量弛豫时间

量子比特保持在激发态  $|1\rangle$  的概率  $P_1$  随等待时间  $t_{delay}$  呈指数衰减（公式 5.8）：

$$P_1 = \exp\left(-\frac{t_{delay}}{T_1}\right)$$

测  $T_1$  的步骤——打到 1 态，不同时间长短读状态：

- **激发**：首先施加一个  $X$  门（由两个  $X/2$  微波脉冲组成），将处于基态  $|0\rangle$  的比特翻转到激发态  $|1\rangle$ ；
- **等待**：让比特闲置 (Idle) 一段延迟时间  $t_{\text{delay}}$ ；
- **读取**：施加读取脉冲 (Qubit measure pulse)，测量此时比特处于  $|1\rangle$  态的概率  $P_1$ ；
- **拟合**：改变  $t_{\text{delay}}$  的长短，测出一系列  $P_1$  数据，通过指数衰减曲线拟合即可提取出特征时间  $T_1$ 。

## 2. 相位退相干时间

**相位退相干 (Dephasing)** 是指由于能级受到环境噪声的扰动，导致  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  之间的 **相对相位** 发生随机漂移，表现为球体在  $x - y$  赤道平面上向内收缩。简单点就是噪声让相位信息丢失了。

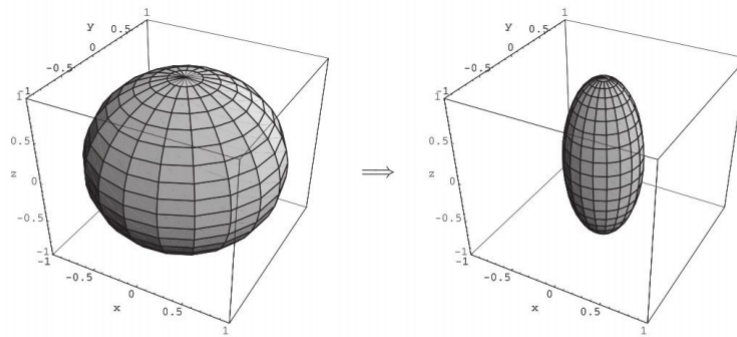


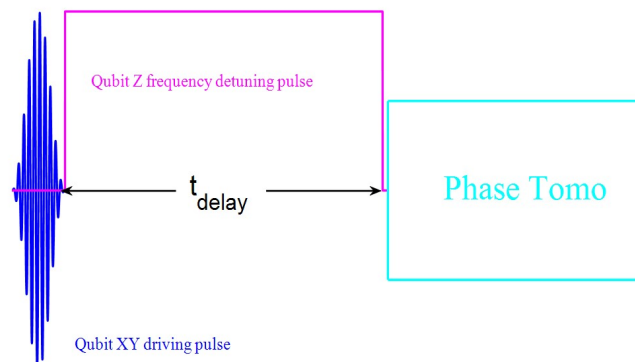
图 5.11 比特相位退相干示意图

注意，态变短收缩和方向乱掉其实是一回事，“变短收缩”其实表述才更对。从“方向乱掉”的理解：前一个  $X$  半派门打到赤道上，等一段时间，后面一个  $X$  半派门，没法转到南极点，所以概率不为 1。布洛赫球变扁理解是：当你把无数个“方向乱掉”的模长为 1 的向量相加取平均时，它们在赤道平面 ( $X - Y$  平面) 上就会因为“相消干涉”而互相抵消。在数学上，这就表现为布洛赫向量的长度  $r = \sqrt{\langle X \rangle^2 + \langle Y \rangle^2}$  从 1 逐渐坍塌变短趋向于 0。

能量弛豫 ( $T_1$ ) 和相位退相干 ( $T_\varphi$ ) 是同时发生的，我们无法直接测到纯粹的  $T_\varphi$ ，而是测得它们共同作用的结果，称为  $T_2$  (**Ramsey 衰减时间**)。Ramsey 实验是测共同作用的结果的，不是单单测相位退相干时间的  $T_\varphi$ ，要用公式算。一般我们指的  $T_2$  可不是  $T_\varphi$ 。

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_\varphi} + \frac{1}{2T_1}$$

**Ramsey 实验**：简单来说就是先从 0 打到赤道上面，等一会，再打到 1，测量为 1 态的概率，如果没有退相干就算 100%，退相干就会小于 100%。



- **制备叠加态**：在  $t = 0$  时施加一个  $X/2$  门，将比特转到布洛赫球的赤道上（形成  $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  的叠加态）；
- **相位累积**：等待  $t_{\text{delay}}$ ，在此期间施加  $Z$  轴频率偏置脉冲，使比特相位旋转并受噪声干扰；
- **全息测量 (Phase Tomography)**：施加另一个  $Y/2$  或  $X/2$  门，把赤道平面的相位信息投影到可测量的  $z$  轴上，从而测量出  $\langle X \rangle$  和  $\langle Y \rangle$  的期望值。一个箭头如果有很多个分身，代表信息乱掉，期望就会趋近于 0，因为分身之间会有可以抵消的分量；

- **计算与拟合**：计算赤道平面上的投影长度  $r(t_{\text{delay}}) = \sqrt{\langle X \rangle^2 + \langle Y \rangle^2}$ ，其随时间满足公式 5.11：

$$r(t_{\text{delay}}) = r(0) \cdot \exp\left(-\frac{t_{\text{delay}}}{T_2^*}\right)$$

拟合可获得  $T_2$ ，再利用测得的  $T_2^*$  和已知的老数据  $T_1$ ，就可以反推出纯相位退相干时间  $T_\varphi$ 。

布洛赫球的纯态可以用单位矢量  $r = (\langle X \rangle, \langle Y \rangle, \langle Z \rangle)$  表示： $|0\rangle$ ：北极 (0,0,+1)； $|1\rangle$ ：南极 (0,0,-1)。表示赤道面只需  $\langle Z \rangle = 0$ 。

**非白噪声 (1/f 噪声) 与回波技术**： $r(t_{\text{delay}}) = r(0) \exp(-t_{\text{delay}}/T_2^*)$  仅在环境噪声为 **白噪声**（各频率强度均匀）时成立。但在实际超导芯片中往往存在大量的 **低频噪声 (1/f 噪声)**。如果 1/f 噪声主导，指数衰减接近  $\exp[-(t/T_\varphi)^2]$ 。

**自旋回波技术 (Spin-echo)**：为了消除这种低频噪声的影响，实验上会采用 Spin-echo 线路：在等待时间  $t_{\text{delay}}$  的**正中间时刻** 额外插入一个  $X$  门。这个  $X$  门相当于把比特在布洛赫球赤道上的相位沿  $x$  轴做了一次“镜像翻转”。这样，前半段  $t_{\text{delay}}/2$  时间内由低频噪声引起的相位漂移，在后半段  $t_{\text{delay}}/2$  时间内会由于继续同向漂移而被自发“抵消”掉（专业上叫回波重聚焦）。简单说就是，和 Ramsey 实验一模一样，就是插了个  $X$  门，对半抵消的思维。

#### 4.2.7.2 耦合性能的标定

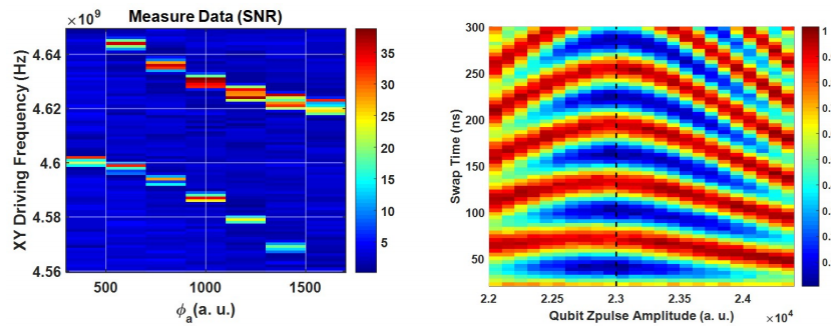


图 5.14 耦合强度实验测试数据

- **直接电容耦合**：一般是固定的，耦合强度主要由电容大小决定；
- **可调耦合器 (Coupler)**：可以通过改变磁通来调节耦合强度，甚至让 XX 耦合完全降到零（关断点）。

可调耦合器就像旋钮，可以打开也可关断，也可以调节合适的耦合强度，用  $g$  表示。

**1. 能级谱线法 (如左图)**：1 号比特频率很高（比如 4.64 GHz），2 号比特频率很低（比如 4.56 GHz），它们各玩各的，互不干扰。我们慢慢调节磁场，让 1 号比特的频率 **往下走** 去接近 2 号比特。如果没有耦合，2 号比特的频率应该一直保持一条水平线（此时调的磁通是 1 号比特的），而此时 1 号比特频率应该是一条斜向下的直线，最终两条线交叉。但是，此时有耦合的话，当它们频率快要相同（共振）时会发生 **能级排斥**，在最接近的时候硬生生被逼开了一个缺口。这两条线 **靠得最近的那个垂直距离 (Gap)**，在量子力学里理论值刚好等于  $2g$ 。你看左图里，两条亮线在中间最接近的时候，纵坐标的间距大概是  $4.64 - 4.60 = 0.04 \text{ GHz} = 40 \text{ MHz}$ ，那么  $g = 20 \text{ MHz}$ 。

**2. 右图**：展现了  $|01\rangle$  与  $|10\rangle$  之间布居数振荡的过程。先将其中一个比特准备到激发态（即让系统处于  $|01\rangle$  态），然后通过方波偏置 (Zpulse) 迅速把两个比特的能级差调到  $\Delta = 0$ （共振点），保持时间为 "Swap Time"，最后测量  $|01\rangle$  态的布居数（概率  $P_{01}$ ）。

就是说第一个比特打到 1，另一个比特为 0，然后把第一个比特频率调到和第二个比特一样的频率一段时间，然后再测第一个比特，发现概率在周期性振荡，就像秋千一样，能量在比特之间传来传去。这种应该是电容耦合的测法，不需要去调耦合器的耦合强度。

能量倒手一整圈（从 1 到 2，再从 2 回到 1）所需要的时间就是一个 **振荡周期  $T$** ：

- **读图**：在黑虚线上，从一个红条纹的中心走到下一个红条纹的中心，纵坐标大概涨了 **30 ns**（这就是周期  $T$ ）；

- **根据公式**: 这个倒手周期  $T = \frac{1}{2g}$ ;
- **反推**:  $g = \frac{1}{2 \times 30 \text{ ns}} \approx 16.6 \text{ MHz}$ 。

不管是左图的 "能级打架", 还是右图的 "秋千倒手", 它们都是在 **耦合强度  $g$  固定不变** 的情况下, 通过调节比特频率来测量这个固定的  $g$ 。

## 五、疑问记录

### 5.1 量子门与量子比特

#### 5.1.1 CR 门是什么? 和 CZ 门的区别?

首先 CR 和 CZ 都是双比特门, **CZ 只是 CR 门在  $\theta = \pi$  时的特例, CR 门更普遍**, 叫做 Cross-Resonance Gate (交叉共振门)。

假设有两个超导量子比特: **控制比特 (Control,  $Q_C$ )** 和 **靶比特 (Target,  $Q_T$ )**。如果我们用  $Q_T$  的共振频率去驱动  $Q_T$ , 它自己会翻转。然而 **CR 操作** 是把微波脉冲的频率设为  $Q_T$  的共振频率, 但 **把这个微波打在  $Q_C$  上**。因为两个比特之间有微弱的物理耦合,  $Q_T$  是否翻转取决于  $Q_C$  处于什么状态: 如果  $Q_C = |0\rangle$ ,  $Q_T$  会以速度  $+g$  顺时针旋转; 如果  $Q_C = |1\rangle$ ,  $Q_T$  会以速度  $-g$  逆时针旋转。

CR 门在哈密顿量上引入了一个核心的相互作用项:  $Z_C X_T$ , 即控制比特的  $Z$  状态 ( $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ ) 决定了靶比特沿着  $X$  轴旋转的方向。通过精确控制微波脉冲的时间, 让它刚好旋转  $90^\circ$  (即  $\pi/2$ ), 就实现了一个标准的 CR 门。通过在这个门前后加上简单的单比特门, 就可以极其高效地组合出我们熟知的 **CNOT 门**。

**CR 门与 CZ 门的区别**: CR 门是一种 "物理实现方式" (原生门), 而 CZ 门是一个 "逻辑功能" (理想门/矩阵)。不过在超导量子计算中, 人们也经常把 "利用频率可调比特实现的 CZ 门" 简称为 CZ 门。

$$\text{CR 门 (Cross-Resonance) 矩阵为 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -i \sin \theta & 0 \\ 0 & -i \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (常取 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{); CZ 门 (Controlled-Phase)}$$

$$\text{矩阵为 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}。$$

#### 5.1.2 交流两比特门是什么?

应用在频率固定不变的量子比特上。比特的频率在出厂后就是固定死的, 无法通过  $\omega$  改变。如果想让两个频率不同的比特产生纠缠, 科学家会通过共同的耦合器, 向其中一个比特发射一个特定频率的交流微波脉冲 (AC/Microwave Pulse)。这个微波的频率往往直接等于目标比特 (Target Qubit) 的固有频率  $\omega_t$ 。通过这个交流微波作为媒介, 两个比特会产生 "交叉共鸣" (Cross Resonance), 从而实现状态的交换或相位调制, 比如交叉共振门 (CR 门)。

举个例子: 控制比特 (Control, 记为  $Q_C$ ) 的固有频率是  $\omega_C$ ; 目标比特 (Target, 记为  $Q_T$ ) 的固有频率是  $\omega_T$ 。因为它们离得很近, 彼此之间存在微弱的、天然的色散耦合 (Dispersion Coupling)。对着控制比特  $Q_C$  照射一束微波, 把微波的频率完美调节到目标比特的频率  $\omega_T$  上。对  $Q_C$  来说, 这束微波的频率跟自己完全不匹配, 所以它不会被直接激发; 但因为  $Q_C$  和  $Q_T$  之间有耦合, 这束微波会通过  $Q_C$  作为 "跳板" 或 "放大器", 把能量传导给  $Q_T$ 。由于这束微波的频率刚好等于  $Q_T$  的固有频率,  $Q_T$  就会发生共振, 开始疯狂旋转 (拉比振荡)。

$Q_T$  旋转的速度完全取决于控制比特  $Q_C$  此时处于什么状态：如果  $Q_C$  是  $|0\rangle$  状态， $Q_T$  会以速度  $V_0$  顺时针旋转；如果  $Q_C$  是  $|1\rangle$  状态， $Q_T$  会以速度  $V_1$  逆时针（或以截然不同的速度）旋转。**拿控制比特当跳板旋转受控比特**。速度慢、串扰多，但是寿命长、布线简单。打的是 XY 线的脉冲包络，所以目标比特是绕  $X - Y$  平面内的某个轴旋转，但是正向转还是反向转由控制比特的  $Z$  状态决定。

### 5.1.3 CZ 门是交流双比特还是直流双比特门？

CZ 门既可以是直流双比特门，也可以是交流双比特门。

- **直流方式** 需要频率可调：两个比特平时频率错开，要做 CZ 门时，控制端打入一个直流磁通脉冲（DC Flux Pulse），迅速把控制比特的频率拉到与目标比特非常接近的一个特殊共振点（称为  $|11\rangle$  与  $|20\rangle$  或  $|02\rangle$  能级相交的避免交叉点）。在这个位置上，两者的电容耦合会瞬间激发一个短暂的物理相互作用，自动在  $|11\rangle$  状态上积累一个  $\pi$  的相位（也就是负号）。整个过程只需要十几纳秒，速度极快。
- **交流方式** 不改变比特的物理频率，而是直接使用前面提到的交叉共振（CR）机制：控制比特决定目标比特绕  $X$  轴转，但只要在执行 CR 门（交流脉冲）的同时配合目标比特自身的单比特旋转，就能在纯微波驱动下把  $ZX$  相互作用转换成标准的 CZ 门。

在造量子芯片时，国际巨头们分成了两大派系，这也决定了他们用 CR 门还是 CZ 门作为底座：

- **派系 A：IBM 路线（固定频率 + CR 门）**。IBM 认为可调频率比特太难伺候了，芯片线路上多加一根调频的控制线，就会多引入一份噪声，所以把比特频率固定死，用极其干净的微波去驱动，靠 **CR 门** 做双比特操作。虽然 CR 门速度相对慢一点（通常一两百纳秒），但比特的寿命（ $T_1$ ）可以做得比较高。
- **派系 B：Google / 浙大路线（可调频率 + CZ 门）**。谷歌等团队认为，平时不用双比特门时应该把两个比特的频率拉得远远的、互不干扰；要用的时候通过电流脉冲把它们频率拉近，发生“碰撞”擦出火花产生 **CZ 门**。这种门速度极快（几十纳秒），但缺点是可调频率比特容易受到通量噪声的影响，工艺极其复杂。

### 5.1.4 CZ 门和 CNOT 门的区别与联系？

$$CZ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**区别：**CZ 完美对称，谁是控制位、谁是目标位根本没有区别——“当比特 1 为 1 时，比特 2 绕 Z 轴转  $180^\circ$ ”和“当比特 2 为 1 时，比特 1 绕 Z 轴转  $180^\circ$ ”没区别。*CNOT* 门则是有明确分工的：一个是高高在上的“控制位”，另一个是被动改变的“目标位”。

**联系：**可以加  $H$  门互换。把 CZ 变成 CNOT：你只需要在 CZ 门的任意一端，给其中一个比特的前后各加一个  $H$  门，它就变成了 *CNOT* 门；把 CNOT 变成 CZ：同样，在 *CNOT* 门的目标比特前后各加一个  $H$  门，它就回到了 CZ 门。因为如果把  $H$  门加在  $X$  门的两边（即  $H \cdot X \cdot H$ ），它就会变成  $Z$  门；反过来，如果把  $H$  门加在  $Z$  门的两边（即  $H \cdot Z \cdot H$ ），它就会变成  $X$  门。

### 5.1.5 超导量子的表征实验有哪些，保真度怎么测？

**RB（Randomized Benchmarking，随机基准测试）** 用于测量单比特门或双比特门的平均误差，也就是单/双比特门保真度。

计算机随机生成一段由克利福德门 (Clifford Group, 一类常用的量子门集合) 组成的量子线路, 在这串随机线路的最后一步计算出一个 "逆操作 (反向门)". 这个逆操作的作用是: 如果前面的所有量子门都是 100% 完美的, 那么加上这个逆操作后, 量子比特应该百分之百回到最初的状态 (比如  $|0\rangle$ )。随着随机线路的长度 (量子门的个数) 越来越长, 由于芯片不完美, 最后回到  $|0\rangle$  的概率会像指数一样衰减 (专业术语叫 Clifford Decay)。科学家会测试不同长度 (比如包含 10 个、50 个、100 个门) 的随机线路, 画出一条指数衰减曲线。通过拟合这条曲线的衰减率, 就可以完美剥离掉最后测量时引入的噪声, 精准计算出平均每个量子门的保真度:

$$P_{\text{surv}}(m) = A \cdot p^m + B$$

拟合出的参数  $p$  反映了每多加一个门带来的衰减, 得到平均单个门的保真度。**双比特门 RB** 的原理完全一样, 只是随机序列中加入了双比特门 (如 CNOT 或 CZ), 其衰减速度通常比单比特快很多, 从而能精准扣除单比特门的影响, 算纯粹的双比特门保真度。

**简单点就是:** 将量子比特初始化为  $|0\rangle$  态; 连续施加  $m$  个随机选择的 Clifford 门, 此时量子态已经被 "搅浑" 了; 紧接着施加刚刚计算出来的第  $m + 1$  个门—— $C_{\text{inverse}}$ ; 测量量子比特是否回到了  $|0\rangle$  态。Clifford 不是乱选的: 如果你把任意两个 Clifford 群里的门组合在一起 (连续执行), 它们的功效等同于群里的另一个单一 Clifford 门, 而且它必然存在一个唯一的逆元, 也在群里。

### XEB (Cross-Entropy Benchmarking, 交叉熵基准测试)

XEB 是由谷歌 (Google) 团队在证明 "量子优越性" (悬铃木芯片) 时发扬光大的。在芯片上选择多个量子比特, 让他们同时执行一串完全随机的量子门, 这会导致量子态在整个希尔伯特空间中疯狂纠缠、无序扩散, 最终形成一个极其复杂的 "量子混沌态"。

- 在传统的超级计算机上, 用暴力计算去模拟这套完全一模一样的随机线路, 算出在理论完美状态下最后测量时每一种状态 (比如  $|0010\rangle, |1101\rangle \dots$ ) 应该出现的理论概率分布;
- 在真实的超导量子芯片上把这个线路运行成千上万次, 收集实际采样的实际数据分布;
- 利用统计学中的 "交叉熵 (Cross-Entropy)" 来对比这两组数据。

交叉熵又是什么呢? 理想分布 ( $P$ ): 传统超级计算机在绝对完美、无噪声的情况下算出的每一个量子态出现的理论概率; 现实分布 ( $Q$ ): 真实的超导量子芯片运行成千上万次后统计出来的每一个量子态出现的实际频次。

- 如果芯片完全没有噪声, 它算出来的现实分布  $Q$  就会和超算算出的理想分布  $P$  一模一样, 把它们带入交叉熵公式, 算出的是一个极小值, 这个极小值在物理学上有一个特殊的名字叫香农熵 (Shannon Entropy), 意味着真实芯片完美还原了量子干涉的 "波斑指纹";
- 如果芯片一运行就退相干, 所有的量子干涉全部消失, 最后测量时它就是在投一万次均匀的骰子, 此时把这个 "完全均匀的分佈  $Q$ " 和超算算出的 "混沌指纹分佈  $P$ " 带入公式, 算出来的交叉熵会是一个极大值。

XEB 越高越接近 1 越好。2019 年谷歌 53 个可用量子比特的 "悬铃木" (Sycamore) 超导芯片, 在执行了多层极其复杂的随机量子线路后, 测得的最终系统 XEB 保真度约为  $F_{\text{XEB}} \approx 0.22\%$  (约 0.0022)。到了 2023 年, 谷歌推出了第二代包含 70 个量子比特的新型芯片, 在更难的线路上测得的系统 XEB 保真度约为  $F_{\text{XEB}} \approx 0.1\%$  (约 0.001)。看起来反而退步了, 但 2023 年做了一场难度高出成千上万倍的实验: 53 个比特的空间大小是  $2^{53} \approx 9 \times 10^{15}$ , 70 个比特的空间大小是  $2^{70} \approx 1.18 \times 10^{21}$ 。全球最顶尖的超级计算机即便不吃不喝算上几万年, 也无法模拟出这 0.1% 的量子指纹。

具体计算过程是: 如果一个单比特门准确率是 99.9%、双比特门准确率是 99.4%、测量准确率是 97%, 当你把 53 个比特联动起来做上千次门操作时, 系统总保真度就是把这些点几几的数字全部乘在一起:

$$0.999^{N_1} \times 0.994^{N_2} \times 0.97^{53} \approx 0.22\%$$

在谷歌 2019 年的那场实验中, 为了让传统超级计算机彻底算不动, 他们把线路设计得非常深: 双比特门数量 ( $N_2$ ) 大约执行了 430 次, 单比特门数量 ( $N_1$ ) 大约执行了 1113 次。

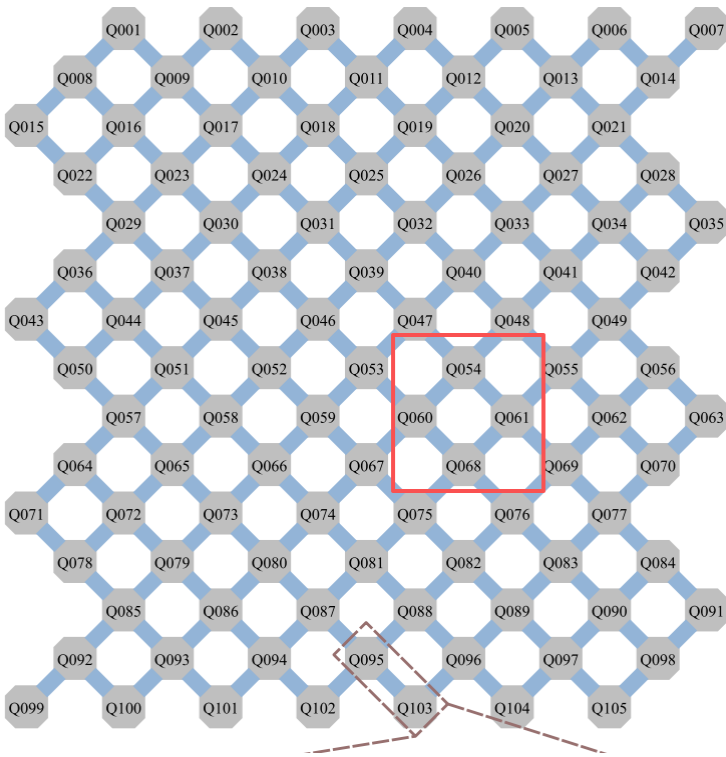
"如果传统超级计算机要算好几万年，那谷歌在 2023 年做实验的时候，拿什么去对答案呢？没有标准答案，怎么能算出 XEB 是 0.1% 呢？" 他们故意设计了两种 **超算能算、但量子芯片同样觉得很难** 的特殊随机线路，然后证明了终极难题也是一样的。

### 5.1.6 JPA 和 HEMT 的区别？

JPA (Josephson Parametric Amplifier, 约瑟夫森参数放大器) 是超导量子计算读取电路中的第一级放大器 (也叫前置放大器)，直接安装在稀释制冷机最底部的极低温工作区 (约 10 mK, 约  $-273.14^{\circ}\text{C}$ )。JPA 的核心是不消耗能量的超导器件——约瑟夫森结。科学家会向 JPA 输入一束强烈的、特定频率的微波 (称为泵浦光 Pump)。当微弱的量子信号 (Signal) 进入 JPA 时，非线性电感会利用泵浦光的能量对量子信号进行调制和放大。因为 JPA 处于超导状态，本身不产生任何热噪声，它在放大信号时引入的额外噪声达到了量子力学海森堡不确定性原理允许的绝对物理下限。

HEMT (High Electron Mobility Transistor, 高电子迁移率晶体管放大器) 是读取电路中的第二级放大器，通常安装在制冷机的 4 K 温区 (约  $-269^{\circ}\text{C}$ )。JPA 虽然噪声极低，但它有一个致命弱点：动态范围很小，且增益有限。而 HEMT 是一种特殊的场效应晶体管 (通常由砷化镓 GaAs 或磷化铟 InP 材料制成)，它利用异质结界面形成的一层极薄的、移动速度极快的二维电子气 (2DEG) 来导电。在 4 K 的低温下，这些电子几乎不会受到原子晶格振动的散射，运动速度 (迁移率) 高得离谱。高电子迁移率使得 HEMT 可以在消耗极低电功率 (减少发热，不至于破坏制冷机低温) 的同时，提供极宽的频带和非常大的功率放大倍数 (通常大于 30 dB)。

### 5.1.7 实际在量子芯片上的门操作是怎么样的？



我们挑出拓扑图上的 Q060 作为控制比特，挑出与之相邻的 Q068 作为目标比特。刚开机时比特可能处于杂乱的状态，科学家会静置一段时间让它们自发冷却到绝对零度附近的基态  $|0\rangle$ 。

现在我们要让 Q068 进入叠加态：在其 XY 控制线上打一个  $X_{\pi/2}$  门脉冲，这束微波顺着同轴电缆插进稀释制冷机，照射到 Q068 上。Q068 的超导电路吸收了微波能量，发生 "拉比振荡"。通过精准控制微波的相位 (决定绕 X 轴还是 Y 轴转) 和波形面积/时间 (决定转多少度， $\pi/2$  就是转  $90^{\circ}$ )，Q068 就乖乖地从  $|0\rangle$  状态旋转到了叠加态。微波虽然进入了芯片，但因为频率与旁边的 Q060 (比如频率是 4.8 GHz) 完全不匹配，Q060 充耳不闻，保持静止。现在，Q060 是  $|0\rangle$ ，Q068 是叠加态。

**直流双比特门的话：**我们要执行核心的 CNOT 门（双比特门），这就必须动用拓扑图上连接它们的蓝色线条（可调耦合器）。科学家通过专门的 Z 控制线（直流磁通线），向 Q060 和 Q068 中间的可调耦合器打入一个特定的直流方波。这个直流偏置会瞬间改变耦合器的物理能级，原本关闭的通道被“强行打开”，Q060 和 Q068 之间的虚拟光子开始疯狂交换。因为通道打开，两者的能量发生交融，Q060 的状态（是 0 还是 1）会直接作为边界条件，物理性地影响 Q068 积累相位的速度。通过精确计算直流脉冲维持的时间（比如 30 ns），当两者的相位差刚好碰撞出  $\pi$ （负号）时，撤走直流偏置、关闸，CZ 门在物理上宣告完成。要变成 CNOT 门，再打一个微波绕 X 轴转  $90^\circ$  就是了。

**交流双比特门：**它们中间的蓝线是个死电容，关不上。科学家不用 Z 线直流电，而是直接通过 Q060 的微波线打入一束频率属于 Q068 ( $\omega_{68}$ ) 的交流微波脉冲。Q060 自己不吸收，但把能量传给了 Q068，Q068 开始旋转，且旋转方向完全受 Q060 的状态控制，这个就是 CR 门。实际变成 CZ 还要再打一个微波。

**读取阶段：**科学家向芯片的测量谐振腔（Readout Resonator）打入一束连续的微波，这束微波穿过 Q060 和 Q068 附近的结构。根据量子力学的色散读取原理，比特处于  $|0\rangle$  还是  $|1\rangle$  会导致测量腔的谐振频率发生极其微小的偏移。带有频率偏移的反射微波（这就是最终的输出信号）被弹回来，依次经过 JPA（极低温无噪放大）和 HEMT（4K 大功率放大），一路狂飙传输到室温环境的采集卡上。采集卡通过解析微波的相位和振幅，在屏幕上吐出最终的数据。

**那为什么还要造那么多比特？** 既然两个比特就能把单比特门（如 X 门）和双比特门（如 CNOT 门）全部演练一遍，为什么科学家们还要费尽心机在芯片上造 53 个、70 个甚至上百个比特呢？因为在实际运行复杂的量子算法时，不可能所有的计算都只在两个比特之间发生：复杂的算法需要  $Q_1$  和  $Q_2$  做 CNOT 的同时， $Q_3$  和  $Q_4$  也在做哈达玛门， $Q_5$  和  $Q_6$  在做 CZ 门，这就需要芯片有足够宽广的“战场面积”。由于近邻耦合限制，远距离的比特互动需要大量中间的比特充当“木板”，通过连续的 SWAP 门把数据传过去，存在“数据网络”和“路由传输”的概念。而且目前的物理比特太脆弱了，内禀误码率很高（比如双比特门只有 99.4% 的准确率），这种芯片只要连续做上千次操作，信号就会彻底变成噪声（总保真度跌到零点几）。为了解决这个问题，科学家必须引入量子纠错码（Quantum Error Correction）：每一个真实存在的硬件格子（比如图中的 Q060），通过量子纠错算法把几十个甚至上千个物理比特“绑在一起”，利用它们之间的纠缠来互相监督、检查错误。最终，这上千个物理比特在软件层面上会融合成一个完美无瑕、绝不出错的“逻辑比特”。

### 5.1.8 退相干时间怎么测量？ $T_2$ 、 $T_1$ 、 $T_\varphi$ 之间的区别？

保真度是用 RB 实验测的，而退相干时间要用寿命测试和 Ramsey 实验。

**纵向弛豫时间  $T_1$** （也叫能量弛豫时间  $T_1$ ）衡量的是量子比特从高能态（激发态  $|1\rangle$ ）自发跌落回低能态（基态  $|0\rangle$ ）的平均时间，实验叫做寿命测试：施加一个  $\pi$  脉冲（相当于 X 门），把比特百分之百推到激发态  $|1\rangle$ ；等待一段变长的时间  $\tau$ ，测量比特的状态。随着等待时间  $\tau$  变长，读出  $|1\rangle$  的概率会呈指数衰减  $e^{-\tau/T_1}$ 。拟合这个衰减曲线，衰减到  $1/e$ （约 37%）处的时间就是  $T_1$ 。

**去相位时间  $T_2^*$** （Ramsey 实验）衡量的是量子比特在叠加态时，受环境噪声影响导致相位信息丢失的速度（纯去相位）：施加一个  $\pi/2$  脉冲，把比特推到赤道面上的叠加态  $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ ；让比特在环境中自由演化（Free Induction Decay）时间  $\tau$ ，在此期间如果环境有磁场波动，叠加态的相位就会开始“乱飘”；故意让微波频率与比特频率有一点点偏差（失谐），让比特绕 Z 轴旋转，这样图像就是震荡衰减、更好看；再施加第二个  $\pi/2$  脉冲然后测量，测量结果会呈现出类似波浪的震荡衰减信号（称为 **Ramsey 边缘震荡**），其包络线的指数衰减速度就是  $T_2^*$ 。

**回音去相位时间  $T_2$** （Hahn Echo 实验）：由于  $T_2^*$  包含了环境中那些“缓慢变化的低频噪声”，实验物理学家想了一个办法把这部分人为误差消掉，测出真实的退相干极限，这就叫自旋回音（Spin Echo）。同样先用一个  $\pi/2$  脉冲把比特推到叠加态；等待时间  $\tau/2$ ，此时由于噪声，不同成分的相位像长跑运动员一样散开了；**关键点**：在正中间插一个  $\pi$  脉冲，开始对称抵消；再等待  $\tau/2$ ，抵消低频；施加最后的  $\pi/2$  脉冲并测量。这种方法就像回音一样，把慢速的低频环境噪声抵消掉了。这样测出来的  $T_2$  时间（回音寿命）通常会显著长于  $T_2^*$ ，它代表了更加本质的量子相干寿命。

$T_2$ （总的去相位时间）是一个“综合结果”，而  $T_\varphi$ （纯去相位时间）是导致这个结果的“其中一个独立因素”：

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_\varphi}$$

- $T_1$  (**纵向弛豫时间 / 能量弛豫**)：代表比特能量丢失到环境中的速度（比如从激发态  $|1\rangle$  跌落到基态  $|0\rangle$ ）；
- $T_\varphi$  (**纯去相位时间 / Pure Phasing**)：代表比特没有丢失能量但相位乱了。比如比特一直保持在叠加态  $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$  没变，但是由于环境磁场杂噪， $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  之间的相对相位（那个  $\pm$  号）像喝醉酒一样瞎晃荡；
- $T_2$  (**横向去相位时间 / 总去相位**)：是最终观测到的叠加态总寿命。由于  $T_2$  衡量的是“叠加态能维持多久”，只要叠加态被破坏了， $T_2$  过程就结束了：能量没丢但相位模糊了，这个速度是  $\frac{1}{T_\varphi}$ ；比特直接从  $|1\rangle$  掉回了  $|0\rangle$ （发生  $T_1$  过程），既然高能态  $|1\rangle$  都没了，叠加态自然也就不复存在了，也就是说  $T_1$  过程会强行终止  $T_2$  过程。

那为什么公式里是  $\frac{1}{2T_1}$  而不是  $\frac{1}{T_1}$  呢？因为  $T_1$  影响的是振幅（Wavefunction amplitude），而量子测量测的是概率（Amplitude 的平方）。在量子力学推导中，振幅衰减和概率衰减有一个根号关系，转换到速率上，就导致能量弛豫对相位衰减的贡献只有一半，即  $\frac{1}{2T_1}$ 。

- 如果芯片的纯去相位保护做得完美无瑕，此时公式变为  $\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1}$ ，即  $T_2 = 2T_1$ 。无论你的材料多么完美，只要有  $T_1$  能量耗散存在， $T_2$  绝不可能超过  $2T_1$ ；
- 如果环境噪声极大、相位极其不稳定（ $T_\varphi$  非常小），此时  $\frac{1}{T_\varphi}$  远远大于  $\frac{1}{2T_1}$ ，那么公式中  $T_1$  的影响就可以忽略不计，此时  $T_2 \approx T_\varphi$ 。你在实验室里测出来的  $T_2$ ，其实绝大部分都是由低频噪声引起的纯去相位。

在实验上，我们能直接通过脉冲序列测出来的是  $T_1$ （用弛豫实验）和  $T_2$ （用 Hahn Echo 回音实验），而  $T_\varphi$  **是无法直接测量的**。实验物理学家通常是先测出  $T_1$  和  $T_2$ ，然后把数据代入上述公式，反算出  $T_\varphi = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{2T_1}\right)^{-1}$ ，以此来评估芯片面临的纯相位噪声有多严重。

### 5.1.9 旋转坐标系下，XY 微波频率和量子本身频率的微妙联系？

在现实中，量子比特的固有频率  $\omega_q$  非常高（比如 5 GHz），这意味着在实验室的静止视角下，比特的 Bloch 矢量在赤道面上每秒钟要疯狂旋转 50 亿圈！如果我们就这么看着它，所有的物理细节（比如微小的噪声、几 MHz 的失谐）都会被这 50 亿圈的狂暴旋转彻底淹没。为了看清细节，让我们的眼睛（坐标系）也跟着以微波的频率  $\omega_{\mu w}$  旋转。

在量子力学里，量子比特的能量差决定了它绕  $Z$  轴旋转的速度。当你的坐标系以微波频率  $\omega_{\mu w}$  旋转时，根据相对运动原理，相当于给整个系统施加了一个反向的“虚拟旋转力”，这会给系统的哈密顿量减去一个正比于  $\omega_{\mu w}$  的能量。原本比特的能量（由固有频率  $\omega_q$  决定）是绕  $Z$  轴转动的源泉，现在减去了微波的频率，剩下的有效能量就变成了：

$$\Delta = \omega_q - \omega_{\mu w}$$

在量子力学中，只要  $Z$  方向上有能量差  $\Delta$ ，状态就会绕着  $Z$  轴旋转，它的角速度刚好就是这个失谐量  $\Delta$ 。在 Bloch 球上，赤道面的平面运动就是由  $Z$  轴的能量决定的：比特正处于一个微弱的、由“系统能量差  $\Delta$ ”产生的虚拟磁场中，并绕着  $Z$  轴以频率  $\Delta$  进行拉莫尔进动。

去看 Ramsey 实验，逻辑就闭环了：第一个  $\pi/2$  脉冲强制把比特在旋转坐标系里拉到了赤道面；微波关了自由演化  $\tau$ ，但你的“摄像机”（参考时钟）还在按  $\omega_{\mu w}$  算时间，因为存在速度差  $\Delta$ ，比特在你的镜头里就开始以  $\Delta$  的频率绕  $Z$  轴在赤道面上“转圈圈”；第二个  $\pi/2$  脉冲，你的摄像机作为基准在固定的方向（比如  $X$  轴）施加脉冲，因为比特自己绕  $Z$  轴转到了不同的角度，它被推向北极还是南极，就完全取决于它在赤道面上绕  $Z$  轴转了多少度。所以，**失谐量就是旋转坐标系里的“微观时钟差”**，它在 Bloch 球上的具象化表现，就是比特绕  $Z$  轴的旋转频率。

#### 5.1.10 双比特门纠缠到底是个什么东西？

在传统计算机里，双比特门（比如异或门 XOR）是单向的、有因果关系的逻辑：“如果 A 是 1，那么把 B 翻转。”在这里，A 是绝对的主宰，B 是被动的受害者，A 怎么变完全不需要看 B 的脸色。但在量子世界里，双比特门（如 CZ 或 CR）一旦开启，因果关系就模糊了，两个比特变成了“互为因果”。

以 CZ（受控相位）门为例：它的逻辑看似是 "如果控制比特是  $|1\rangle$ ，就给靶比特加一个负号（ $\pi$  相位）"。但在量子力学中，这个负号是加在两个比特共同组成的整体状态（也就是  $|11\rangle$ ）上的。你分不清到底是 A 控制了 B，还是 B 控制了 A：它们在向对方施加影响的同时，自己也被对方改变了。这种 "你中有我、我中有你" 的物理状态，就是纠缠。

在真实的超导芯片上，纠缠不是凭空产生的，它依赖于物理实体的 "能量勾连"：

- **CZ 门里的 "能量排挤"（能级排斥）**：想象两个量子比特 A 和 B，如果把它们单独放在各自的房间里，它们相安无事。实验物理学家在制造芯片时会在 A 和 B 之间用一根微纳导线（电容）把它们连在一起。当 A 处于  $|1\rangle$  且 B 也处于  $|1\rangle$  时（即  $|11\rangle$  状态），由于电容的物理耦合，这两个高能量的状态会产生库仑排斥或者量子相干重组，在物理上导致它们的能级发生移动（Avoided Crossing 避免交叉）。由于能量发生了微小的改变，系统演化一段时间后，就会在  $|11\rangle$  状态上积累出一个额外的物理相位（那个关键的负号）。你原本只是想把两个处于叠加态的比特拼在一起，但因为这部分物理能量的 "强行干预"，它们各自独立的波函数被 "焊接" 在了一起，再也打不开了。
- **CR 门里的能量跳板**：实验员用微波去轰炸 A 比特，但微波的频率调成 B 比特的频率。因为 A 和 B 之间有物理连线，A 就会变成一个 "中转站"。A 如果在  $|0\rangle$ ，它传递过去的微波让 B 顺时针转；A 如果在  $|1\rangle$ ，它传递过去的微波让 B 逆时针转。当 B 开始根据 A 的状态 "既顺时针又逆时针" 旋转时（因为 A 自身也是叠加态），两者的命运就彻底绑定了。B 旋转的每一幅画面，都深深地刻上了 A 当时状态的烙印。

在双比特门作用之前，两个比特的波函数是 "可因式分解" 的（比特 A 的状态） $\times$ （比特 B 的状态）。这意味着你对 A 做任何观测，绝对不会影响 B；A 的寿命快到了（ $T_1$  弛豫），B 还在高高兴兴地运行。但在双比特门（比如一个 CNOT 门）作用之后，它们的波函数被强行融合成了一个不可拆分的整体（比如贝尔态）：

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

这个时候，"比特 A" 和 "比特 B" 这两个独立的概念在物理上已经消失了，宇宙中只存在一个名字叫作 "AB 复合体" 的东西。此时，如果环境噪声对比特 A 扇了一巴掌（导致 A 发生了纯去相位  $T_\phi$ ），比特 B 的相位也会瞬间溃散。双比特门在让我们获得量子并行计算能力的同时，也把两者的脆弱性捆绑在了一起。这就是为什么双比特门的保真度（通常在 99% 到 99.9% 之间）远远低于单比特门（通常能做到 99.99%）的物理硬伤所在。

**双比特门纠缠**，在硬件上就是利用电容耦合、微波交调等物理手段，让两个比特的能量状态发生交叉和干涉；在结果上，就是抹杀了两个比特的独立人格，将其融合成一个由统一法则支配的量子整体。

### 5.1.11 双比特有 4 个态，岂不是有 4 个能级？

两个量子比特（双比特系统）确实有 4 个基态： $|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ 、 $|11\rangle$ ，这意味着系统拥有 4 个能级。但要注意：**能级对应的是 "能量"，而常说的频率对应的是能级之间的 "跃迁"。**

假设我们有两个独立的超导比特  $Q_1$  和  $Q_2$ ，它们的单个跃迁频率分别是  $\omega_1$  和  $\omega_2$ 。当把它们放在一起时，这 4 个能级的能量（理想情况下）是这样分布的：

- $|00\rangle$ （基态）：两个比特都在地面，我们将这个状态的能量定义为零点（ $E_{00} = 0$ ）；
- $|01\rangle$ ： $Q_1$  在地面， $Q_2$  激发，能量为  $E_{01} = \hbar\omega_2$ ；
- $|10\rangle$ ： $Q_1$  激发， $Q_2$  在地面，能量为  $E_{10} = \hbar\omega_1$ ；
- $|11\rangle$ ：两个比特都在激发态，能量为  $E_{11} = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2$ 。

$\hbar$  是约化普朗克常数，它负责把 "频率" 翻译成 "能量"（ $E = \hbar\omega$ ）。在物理学中，孤立的能级是无法直接测出频率的，我们平时说的 "频率" 指的是系统从一个能级跳到另一个能级时吸收或释放的微波频率。因为有 4 个能级，它们之间理论上存在 6 种可能的跃迁通道，但在实际实验中我们最关心的是以下四种单比特跃迁频率。

当两个比特之间存在物理耦合时，神奇的事情发生了： $Q_1$  的跃迁频率会受到  $Q_2$  当前处于什么状态的影响，此时频率分裂成了两组：

- **第一组 (看  $Q_1$  的跃迁)**：如果  $Q_2$  在  $|0\rangle$  状态， $Q_1$  从  $|0\rangle$  变到  $|1\rangle$  (即系统从  $|00\rangle \rightarrow |10\rangle$ )，需要的微波频率是  $\omega_{10}$ ；如果  $Q_2$  在  $|1\rangle$  状态， $Q_1$  从  $|0\rangle$  变到  $|1\rangle$  (即系统从  $|01\rangle \rightarrow |11\rangle$ )，需要的微波频率是  $\omega_{11}$ 。因为物理耦合， $\omega_{10}$  和  $\omega_{11}$  并不相等！它们之间相差一个非常关键的量，叫作  $\chi$  (色散移位，Dispersive Shift)。
- **第二组 (看  $Q_2$  的跃迁)**：同理，当  $Q_1$  处于  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$  时， $Q_2$  跃迁所需的微波频率也不同 (分别是  $\omega_{01}$  和  $\omega_{11}$ )。

所以，双比特系统有 4 个能级，我们测出来的不是这 4 个能级本身的频率，而是这 4 个能级两两组合跃迁时所对应的多个不同微波频率。这些频率之间由于量子耦合产生的微小差异 (通常在几 MHz 到几十 MHz 之间)，正是我们用来操控量子比特、制造纠缠的 "物理杠杆"。

### 5.1.12 量子计算究竟是怎么实现的？

- **量子叠加** 使得可以同时表示：如果有 300 个经典计算机的传统比特，它在同一瞬间只能表示  $2^{300}$  个可能数字中的其中一个；而 300 个完美的量子比特可以同一瞬间同时表示这  $2^{300}$  个数字，这个数字比宇宙中的原子总数还要多。
- **量子纠缠** 就是两个或多个量子比特可以进入一种 "心灵感应" 的状态：一旦两个比特发生纠缠，无论它们距离多远，只要你测量其中一个的状态，另一个的状态就会瞬间确定。在计算中，纠缠将所有量子比特 "联结" 成一个整体，让计算能力随着比特数量的增加呈指数级暴涨。
- **量子相干与干涉**：既然量子计算是同时计算无数种可能，那最后测量时它会不会随机给你一个错误答案？答案是利用干涉。量子比特的状态是有 "相位" (可以理解为波峰和波谷) 的。量子算法的设计目标，就是通过巧妙的操控让正确答案的波峰相互叠加变大，让错误答案的波峰和波谷相互抵消，最后测量时正确答案就会以接近 100% 的概率弹出来。

实际工程上，就是程序员在电脑上用 Python 编写量子算法，这些算法是由一系列量子门 (如 Hadamard 门、CNOT 门) 组成的逻辑电路。计算机把这些量子门转译成具体的物理控制信号：对于超导量子芯片，这些信号是特定频率、特定时长的微波脉冲 (通常在几 GHz)。计算完成后，使用特殊的测量电路 (如超导谐振腔) 去 "看" 一眼量子比特，量子态瞬间塌缩成确定性的 0 或 1，输出给传统计算机。具体算什么、用什么算法、怎么算，可以看一下 Shor 算法或 Grover 算法。

### 5.1.13 纠错码是怎么纠错的？为什么有 d3、d5、d7 这几种？容错量子计算是怎么实现的？

我们用传统比特 (经典纠错) 来做最直观的解释，然后再无缝切换到量子。

**经典纠错：少数服从多数。**假设你要发送一个比特的信息：0 或 1。如果直接发出去，路上只要一丁点噪声干扰，0 变成 1，接收方就彻底被骗了。为了解决这个问题，最简单的纠错码叫三重码 (Repetition Code)：我们规定不再单发一个比特，而是把 0 编码成 000、把 1 编码成 111。接收方收到数据后进行少数服从多数的表决 (Majority Vote)：

- 情况 A：路上有一点噪声把第二个比特翻转了，接收方收到 010，表决结果两个 0 一个 1，所以原始信息肯定是 0 (成功纠错 1 个错误)；
- 情况 B：噪声太恐怖了，把前两个比特都翻转了，接收方收到 110，表决结果两个 1 一个 0，接收方会误判原始信息是 1 (纠错失败)。

量子的世界更诡异，因为根据量子力学，你不能直接去看 (测量) 量子比特的状态，一看叠加态就塌缩了。那怎么知道哪个比特翻转了？科学家设计了极其精妙的联合测量 (Syndrome Measurement, 残差测量)：比如有三个超导比特纠缠在一起，我们不测量单个比特是 0 还是 1，而是用微波脉冲去测量 "第 1 个和第 2 个比特的状态是否相同" 以及 "第 2 个和第 3 个比特的状态是否相同"。如果得到的答案是 (相同, 不相同)，这就说明第 3 个比特肯定偷偷翻转了！整个过程中，我们只知道了 "谁和谁不一样" (这叫错误图谱)，但完全没有窥探比特本身编码的量子机密。最后，我们针对性地用一个微波脉冲把第 3 个比特翻转回来，完美复原！

**为什么有  $d = 3, d = 5, d = 7$  这几种？** 这里的  $d$  在数学上叫做码距 (Code Distance)。为什么数字必须是 3、5、7 这样的奇数？因为纠错的核心公式是：

$$\text{能纠正的错误个数 } t = \frac{d-1}{2}$$

$d = 7$  可以扛住同时发生 3 个比特翻转的超级大噪声， $d = 3$  只能扛住 1 个。为什么没有  $d = 4$ ？因为当路上一旦同时翻转了 2 个比特，接收方会收到 1100，这时候两个 1、两个 0 刚好平手，接收方能发现出错了，但是根本无法判定到底该往哪边修正。

在当下的超导量子计算中（比如谷歌的 Sycamore 芯片或 IBM 的芯片），大家天天挂在嘴边的 "表面码 (Surface Code)" 就是按照  $d = 3, d = 5, d = 7$  来排列硬件的。表面码有两种不同的主流设计方案：

- **方案一：只看 "数据比特"。** 在最初、最纯粹的数学定义里，我们只计算用来真正存储和编织量子信息的数据比特。对于一个正方形的拓扑表面码，如果它的码距是  $d$ ，那么它所需要的数据比特数量就是：

$$\text{数据比特数} = d^2$$

当  $d = 3$  时，需要  $3 \times 3 = 9$  个数据比特；当  $d = 7$  时，需要  $7 \times 7 = 49$  个数据比特。

- **方案二：全盘全计 (广义的芯片物理比特数)。** 但在实际的超导芯片硬件上，光有数据比特是不够的，因为我们前面所说，我们不能直接测量数据比特，必须在每两个或四个数据比特之间塞进去一个专职干脏活的 "辅助比特 (Ancilla Qubit / Measure Qubit)"，通过它们去间接测量错误图谱。在最标准的正方形表面码拓扑结构 (旋转表面码, Rotated Surface Code) 中，为了测出所有的数据翻转和相位翻转，需要的辅助比特数量是  $d^2 - 1$  个。这时候，芯片上为了维护这一个逻辑比特，所需要的总物理比特数 (数据 + 辅助) 为：

$$\text{总物理比特数} = d^2 + (d^2 - 1) = 2d^2 - 1$$

当  $d = 7$  时： $2 \times (7^2) - 1 = 98 - 1 = 97$  个总比特；当  $d = 3$  时： $2 \times (3^2) - 1 = 18 - 1 = 17$  个总比特。在实际工程汇报中，工业界 (比如谷歌宣称实现  $d = 7$  纠错时) 往往更倾向于使用  $d7 = 97$  个物理比特。

### 5.1.14 人类的观察改变了量子本身的行为，那么这边的观察究竟是怎么样的观察？

观察的本质，是一次 "无法避免的物理碰撞"。在量子世界里，量子比特 (比如超导电路里的一个微弱电流状态) 太小、太脆弱了。你想去 "看" 它，你就必须和它发生物理接触。

在超导量子计算机里，这个 "看" 的过程是这样实现的：芯片上每个超导比特的旁边都紧挨着刻有一根弯弯曲曲的导线，叫做 "读出谐振腔"。开始观察 (测量) 时，控制柜会发射一束很强的、特定频率的微波脉冲送进这根谐振腔，这束微波在谐振腔里激荡，它的电磁场会和旁边的超导量子比特发生极强的电磁相互作用。比特如果是  $|0\rangle$  态，它对这束微波的反弹方式是一种样子；如果是  $|1\rangle$  态，反弹方式则是另一种样子。微波带着这个反弹的信号飞出芯片，被室温下的电子仪器放大解码。

这束微波的能量和外界的噪声一样，相对于娇贵的叠加态来说太粗暴了。在测量脉冲打入之前，比特还处于  $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  的叠加态；当这束高强度的测量微波轰击过来时，它和比特之间瞬间发生了剧烈的退相干，比特被迫与谐振腔里的无数个光子发生纠缠，它原本在布洛赫球赤道面上优雅旋转的 "量子相位信息" 瞬间被彻底冲刷、抹平。在这个巨大的物理冲击下，比特无法再保持两边讨好的叠加姿态，只能被迫随机选择一个方向站队——要么彻底跌落到南极 ( $|0\rangle$ )，要么彻底跳到北极 ( $|1\rangle$ )，这就是所谓的 "波函数塌缩"。

**如果没人看，放在那算 "观察" 吗？会，它依然会 100% 塌缩。** 只要测量微波脉冲打中了比特，微观的量子态就已经被宏观的电路 (谐振腔、放大器、线缆) 给 "污染" 了，大自然已经完成了这次物理碰撞，信息已经泄漏到了宏观世界。至于人类的意识有没有接收到这个信息，根本不影响物理结果。甚至可以说，环境噪声就是一种大自然对量子的 "偷看"。

所以，量子力学里的 "观察"：不是人类用眼睛看，或者用意识去感应 (不是意识决定论)，而是 **用一个宏观的探测物理系统 (如微波束、激光束) 去强行碰撞微观系统，并提取信息的过程** (是粗暴的物理干涉)。

### 5.1.15 几层几层的量子线路是什么？"几层"是什么意思？

一个随机量子线路 (Random Quantum Circuit) 通常是由许多个量子门排列组合而成的。为了让芯片高效且整齐地运行，科学家把这些门像切切糕一样切成了一段一段的时间片，这就是 "层 (Layer)"。在超导量子芯片中，标准的一层通常包含以下两个连贯的动作：

- **单比特门阶段**：芯片上所有的量子比特同时执行各自随机的单比特门（比如转动  $90^\circ$ ），这个动作极快，几十个比特一起做，互不干扰；
- **双比特门阶段**：紧接着，比特之间按照特定的物理图案 (Pattern) 两两配对，同时执行双比特门（比如 CZ 门或 iSWAP 门）来产生纠缠。

这 "一动 (单比特门) + 一缠 (双比特门)" 的组合，在物理上就被定义为一层 (1 Layer)。

**层数决定了纠缠的 "广度" 与 "深度"。** 超导芯片上的比特通常是网格状排布的，一个比特只能和它前后左右邻近的比特做双比特门。第 1 层：比特 A 只能和挨着它的比特 B 发生纠缠；第 2 层：比特 B 又和另一侧的比特 C 发生纠缠，此时 A 的信息通过 B 传给了 C (A 和 C 间接纠缠了)。层数越多，意味着芯片上所有比特的命运被编织得越紧密。到了 20 层的时候，芯片上几十个比特已经融合成了一个极其庞大、根本无法在数学上进行因式分解的超级纠缠态。

**层数决定了经典超级计算机的 "绝望程度"。** 谷歌和祖冲之号做的是 "随机线路采样" 任务，经典计算机想要模拟这个任务，需要追踪这 20 层里每一步的所有可能性。如果只有 5 层，经典电脑一秒钟就模拟完了；到了 14 层、16 层，经典超级计算机需要开足马力算几天；当达到 20 层（配合 50-60 个比特）时，经典超级计算机就算用上全地球最顶级的超算集群（比如 Frontier 或富岳）也要算上万年，这时量子优越性就实现了。

**层数还决定了芯片的 "体能" 要求。** 量子比特是有寿命的（超导比特通常只有几十到几百微秒），每多往前走一层，就需要消耗几百纳秒的时间，同时：

整条线路的总保真度  $\approx$  (单个门保真度)<sup>总门数</sup>

在 20 层的线路里可能包含了上百个单比特门和几百个双比特门，如果你的双比特门保真度只有 99%，几百个门乘下来，总保真度直接归零。论文里的 "实现了 20 层量子线路"，潜台词其实是在向全世界秀肌肉："我的芯片不仅比特数量多，而且比特寿命足够长、门的精度足够高，高到可以让这几十个比特在经历了 20 轮连续不断的微波轰炸和剧烈纠缠后，依然没有 '退相干死亡'，还能吐出正确的量子计算结果。"

### 5.1.16 Shor 算法是什么？

Shor 算法 (秀尔算法) 由数学家彼得·秀尔 (Peter Shor) 于 1994 年提出，是量子计算史上里程碑式的发现。因为著名的 RSA 加密算法 (保护着我们的银行、网络通信和军事机密) 的底层安全基石，就是 **相信传统计算机无法在有效时间内破解大数的质因数分解**。

其核心逻辑是一个令人拍案叫绝的跨界结合：**将一个 "纯数学的数论问题"，转换成一个 "物理上的波干涉问题"**。如果直接让量子计算机去盲猜因数，它也快不了。彼得·秀尔最伟大的贡献，是利用数论里的一个奇妙定理 (欧拉定理的变体)，把分解大数  $N$  的问题转化成了 **寻找一个函数的周期**。

假设我们要分解大数  $N$ ：随便猜一个比  $N$  小的数字  $a$ ，构造一个函数  $f(x) = a^x \pmod{N}$  (也就是计算  $a$  的  $x$  次方，再除以  $N$  算余数)。数学大师们发现，这个余数函数  $f(x)$  随着  $x$  的增加，**一定会呈现完美的周期性重复**。

举个简单的例子：假设我们要分解  $N = 15$ ，我们瞎猜一个  $a = 7$ ：

- $x = 1: 7^1 \pmod{15} = 7$
- $x = 2: 7^2 = 49 \pmod{15} = 4$
- $x = 3: 7^3 = 343 \pmod{15} = 13$
- $x = 4: 7^4 = 2401 \pmod{15} = 1$
- $x = 5: 7^5 \pmod{15} = 7$  (开始重复了!)

- $x = 6: 7^6 \pmod{15} = 4$

它的余数轨迹是 7, 4, 13, 1 | 7, 4, 13, 1 | 7, 4... , **周期 (记为  $r$ ) 就是 4**。只要找到了周期  $r$  , 在数学上就可以通过简单的公式  $\gcd(a^{r/2} \pm 1, N)$  (求最大公约数, 传统计算机算这个极快) 直接秒杀算出 15 的因数是 3 和 5。

当  $N$  是一个几百位的超级大数时, 这个周期的重复长度可能长达  $2^{2048}$  , 传统计算机只能一个一个  $x$  去算, 算到宇宙毁灭也找不出这个周期。现在, 寻找周期  $r$  的历史重任交给了量子计算机, 接下来的事情分为四个极具科幻感的物理步骤:

1. **量子并行: 把所有可能性 "一网打尽"**。超导量子计算机施加一排微波脉冲 (Hadamard 门) , 让一排量子比特瞬间进入叠加态。它不是一个一个去试  $x$  , 而是在一瞬间把所有的  $x$  (从 1 到几万亿) 同时输入到量子芯片里。此时芯片内部的量子状态里同时包含了无数个  $(x, f(x))$  的配对。
2. **制造波的交织**。由于所有可能的  $x$  都在同时运算, 这些带有余数  $f(x)$  的量子态在芯片里就像无数道在水面上同时扩散的涟漪 (波函数) 。既然余数是有周期性的, 那么这些量子波的波峰和波谷也天然地带有某种空间的周期性排布。
3. **核心大招: 量子傅里叶变换 (QFT)** 。这是整个算法的灵魂。既然有波就有频率, **函数的周期  $r$  在物理上就对应着这道波的频率**。量子计算机施加一组精心设计的微波脉冲组合执行量子傅里叶变换 (QFT) 。QFT 的本质就是一个超级光学棱镜或者消音耳机: 那些不符合周期规律的杂乱量子态 (错误答案) 在脉冲引导下发生 **相消干涉 (波峰对波谷)** , 概率相互抵消、归零; 而完美契合真实周期  $r$  的那个特定频率的量子态 (正确答案) 发生 **相长干涉 (波峰对波峰)** , 信号被无限放大。
4. **测量塌缩**。当 QFT 结束的一瞬间, 整个量子芯片里其他错误的噪点全部被 "消音" 了, 只剩下一个高耸的波峰——那个代表周期频率的量子态。这时候实验人员拉开闸门进行测量 (Measurement) , 量子态塌缩, 正确的频率 (进而算出周期  $r$ ) 以接近 100% 的概率弹到电脑屏幕上。

**现在在超导量子计算机上实现 Shor 算法了吗?** 目前的超导量子计算机确实已经可以运行 Shor 算法的代码和微波脉冲, 但它面临一个极其尴尬的现状——"15" 是目前真正不作弊、纯粹使用 Shor 算法成功分解的极少数数字之一; 而想要分解破解密码所需要的大数, 中间还差着一条难以逾越的鸿沟。

2001 年科学家就用量子计算机分解了 15 ( $15 = 3 \times 5$ ) , 那现在都 2026 年了, 分解个 21 ( $21 = 3 \times 7$ ) 或者 35 应该易如反掌吧? 然而事实很残酷: 纯粹、完整的标准 Shor 算法在硬件上要分解 21, 其难度和成本比分解 15 暴涨了 100 倍以上。分解 15 的时候, 由于数学上的极度巧合, 算法中绝大多数乘法步骤都变成了 "乘以 1", 量子芯片可以疯狂 "偷懒", 最终只用了 20 几个量子门就搞定了; 但到了 21, 这些数学巧合消失了, 要在硬件上规规矩矩地跑完电路, 需要耗费上千个高精度的双量子比特门 (如 CNOT 门) 。在目前的超导芯片上, 微波脉冲连续打几千次, 量子比特早就因为环境噪声 (纯去相位  $T_2^*$  和纵向弛豫  $T_1$ ) 而死在半路了, 根本撑不到最后干涉出正确答案。

**我们离 "破解 RSA 加密" 还有多远?** 目前的银行、网络通信使用的加密算法是 **RSA-2048**, 要破解它需要分解一个大约 617 位的十进制超级大数。要用超导量子计算机彻底攻克它, 需要两个指标: 理想状态 (无噪声) 需要大约 4000 个完美的逻辑量子比特; 为了消灭噪声, 我们需要用几千个物理比特通过微波控制联合起来才能 "熔炼" 出 1 个完美的逻辑比特。最终硬件需求: 科学家测算过, 真正跑起 Shor 算法撕开 RSA-2048 防线, 需要 **数百万个甚至上千万个物理超导量子比特**。

## 5.2 芯片指标

### 5.2.1 dBm 是什么? NSD 是什么? 为什么是负的?

**dBm 是什么?** dBm (分贝毫瓦) 是表示 **绝对功率** 的对数单位, 基准参照值是 1 毫瓦 (1 mW) , 其计算公式为:

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{mW}}}{1 \text{ mW}} \right)$$

0 dBm 表示功率刚好等于 1 mW。大功率：例如  $+30 \text{ dBm} = 1000 \text{ mW} = 1 \text{ W}$ ；微小功率：例如  $-30 \text{ dBm} = 0.001 \text{ mW} = 1 \mu\text{W}$ 。采用 dBm 的主要原因是信号功率的跨度极大（从皮瓦级到瓦级），使用对数单位可以把相乘计算简化为加减法，且更容易记录极小的数据。

**NSD 是什么？** NSD (Noise Spectral Density, 噪声谱密度) 表示在单位带宽（通常为 1 Hz）内分布的噪声功率。在波形芯片中，NSD 的常用单位是 dBm/Hz（或相对于信号满量程的 dBFS/Hz）。作用：芯片工作时由于热运动和电路内部噪声，全频段都有底噪，NSD 告诉你把这些噪声分摊到每一个 1 Hz 宽度的频带上时到底有多少噪声能量。优势：NSD 不受测量采样率或 FFT 采样点数 (Bins) 的影响，能够客观反映芯片本身的噪声底限性能。

**为什么数值经常是负的？** 负数的出现并不是代表“功率是负的”（物理功率不可能为负），而是数学对数运算和参照基准决定的：当实际功率 ( $P$ ) 小于参照基准 (1 mW) 时， $\frac{P}{1 \text{ mW}} < 1$ ，取对数  $\log_{10}(< 1)$  就会得到负数。只要信号功率小于 1 mW，以 dBm 表示的数值就一定为负的。

**NSD (dBm/Hz) 为什么是极大的负数？** 物理学上的热噪声极限（室温 290K 下）为  $k_B T \approx -174 \text{ dBm/Hz}$ ，这意味着在 1 Hz 的带宽里，物理热噪声功率仅有  $10^{-17.4} \text{ mW}$ （约 0.00000000000000004 mW）。芯片本身的电路还会额外引入噪声，因此实际芯片的 NSD 通常在  $-140 \text{ dBm/Hz}$  到  $-165 \text{ dBm/Hz}$  之间。负得越多（绝对值越大，如 -160 比 -140 更小），说明芯片的底噪越低、性能越好。

## 5.2.2 带宽究竟是什么？为什么单位是频率？和数据率有什么关系？

**带宽 (Bandwidth)** 在信号处理和芯片领域，本质上是指能够有效传输或处理的信号“频率范围的大小”。因为它测量的的是一个频率区间（最高频率与最低频率的差值），所以它的单位也是频率单位——Hz（赫兹）、kHz 或 MHz。

**为什么带宽的单位是 MHz？** 要理解这一点，可以把信号想象成声音：人耳能听到的频率区间是 20 Hz 到 20,000 Hz，这个“有效区间”的宽度就是 带宽 =  $20,000 \text{ Hz} - 20 \text{ Hz} = 19,980 \text{ Hz} \approx 20 \text{ kHz}$ 。同理，对于芯片或系统，带宽 ( $B$ ) =  $f_{\text{high}} - f_{\text{low}}$ ，两个频率 (MHz) 相减，得到的结果单位自然依然是 MHz。

为了不把“带宽”和日常网速中的“Mbps/Gbps”搞混，可以用公路来比喻：频率 (Frequency) 代表车在路上的行驶速度；信号带宽 (Bandwidth, MHz) 代表马路的宽度（有几条车道）；数据传输速率 (Data Rate, Mbps) 代表单位时间内实际通过的车流量。公路越宽（带宽 MHz 越大），能够同时容纳的车流量（数据量 Mbps）就越高。

在波形芯片或无线通信中，带宽 (MHz) 决定了你一次能传输多少信息，由香农公式 (Shannon's Law) 决定：

最大数据速率  $\approx$  带宽 (MHz)  $\times \log_2(1 + \text{信噪比})$

这个公式表明带宽直接线性决定了传输数据的上限，带宽增加一倍，数据传输能力就翻倍。

**为什么有时网络带宽单位是 Mbps？** 信号/硬件层（物理带宽）用 MHz，指电路能处理的电信号频率范围；数字/网络层（数据带宽）用 Mbps（兆比特每秒），指的是通过这个物理管道后每秒钟实际传输了多少二进制数据（0 和 1）。

## 5.2.3 数据率和采样率和分辨率的区别和联系？

- **数据率 bps**：全称 bits per second（比特每秒），指的是一秒钟内传输或处理了多少个二进制位（0 和 1）。100 bps 表示一秒钟传输 100 个 0 或 1；Kbps =  $10^3 \text{ bps}$ （千比特每秒）。
- **采样率 (SPS, Samples per Second)**：表示芯片一秒钟对连续信号取样了多少次（衡量时间分辨率）。
- **分辨率/量化位数 (Bits)**：表示每一个采样点用多少位 0/1 数字化代码来记录（衡量幅度精度）。

三者之间的联系（核心计算公式）：采样点 (SPS)、采样精度 (Bits) 和数据速率 (bps) 之间有一个非常直接的推导关系：

数据速率 (bps) = 采样率 (SPS)  $\times$  每个采样点的位数 (Bits/Sample)

假设你有一个音频 ADC 芯片：采样率  $44.1 \text{ kHz} = 44,100 \text{ Samples/s}$ （一秒抓取 44,100 个采样点），采样精度 16 bits（每一个采样点用一个 16 位二进制数表示），则数据速率 (bps) 为：

$44,100 \text{ SPS} \times 16 \text{ Bits/Sample} = 705,600 \text{ bps} = 705.6 \text{ Kbps}$

| 指标   | 英文简称            | 单位示例           | 含义（比喻）               |
|------|-----------------|----------------|----------------------|
| 采样率  | SPS (Samples/s) | MSPS / GSPS    | 一秒钟采了多少个点            |
| 分辨率  | Bits            | 8-bit / 16-bit | 每一个点的所需的表示位数，位数越大越精细 |
| 数据速率 | bps (Bits/s)    | Mbps / Gbps    | 每秒产生的总数据量的大小         |

5.2.4 功率稳定性是什么？其中单位 ppm 是什么？

**功率稳定性 (Power Stability)** 是指波形芯片或电源等设备，在长时间工作或环境发生变化（如温度波动、电压抖动、器件老化）时，其输出功率保持恒定不变的能力。如果设置芯片输出功率为 100 mW，在工作 8 小时后，实际输出是维持在 100 mW 附近极微小地波动，还是慢慢漂移到了 95 mW 或 105 mW？这种抵御漂移的能力就是功率稳定性。

主要影响因素有：

- **温度漂移**：环境或芯片发热导致内部电路参数变化（最主要的因素）；
- **时间漂移（老化）**：设备连续工作几十或几百小时后的自然衰减；
- **电源波动**：供电电压不稳定导致的输出功率起伏。

**单位 ppm 是什么？** ppm 全称 Parts Per Million，即百万分之一（ $10^{-6}$ ）。它是一个相对变化量的比例单位，用来表示极小的变化或误差，类似于百分比（%，百分之一），但精度比百分比高得多。1%（百分之一）  
= 10,000 ppm; 0.1%（千分之一）= 1,000 ppm。

**为什么不用 % 而用 ppm？** 在波形芯片、高精度射频源或基准源中，性能要求极高，功率漂移通常只有百分之零点零零几。如果用百分比表示，写出来会是 0.005%，不仅零太多容易看错，也不直观；而换算成 50 ppm 就非常清晰。

ppm 如何计算功率变化？

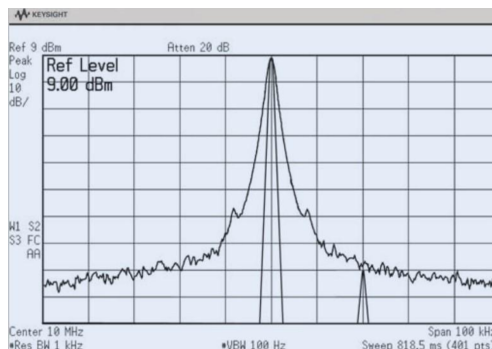
$$\text{功率变化量} = \text{标称功率} \times \left( \frac{\text{ppm 数值}}{1,000,000} \right)$$

ppm 的数值越小，代表芯片的功率稳定性越强、抗干扰能力越好。

5.2.5 相位噪声是什么？为什么是 -dBc/Hz？

相位噪声反映了信号频率的不稳定程度，即信号相位的随机抖动，是评估信号源（如振荡器、频率合成器、波形芯片 PLL/CLK）信号纯净度的核心指标。

理想情况下，一个波形芯片输出的正弦波信号在频域上应该是一根无限细的“针”（单一频率  $f_0$ ，没有宽度）。但现实中，由于芯片内部热噪声、闪烁噪声（1/f 噪声）等的影响，信号的相位会发生极微小的随机相位偏移（Phase Jitter），在频谱图上看，这根理想的“针”底部会向两边张开，形成一个像“裙摆”一样的噪声能量分布（称为边带噪声）。相位噪声测量的就是这个“裙摆”有多大——也就是在距离中心频率（载波  $f_0$ ）偏移一定距离（如 10 kHz 或 1 MHz）的地方，噪声能量相对于中心信号能量的大小。



**为什么单位是 -dBc/Hz?** 这个单位可以拆分为三个部分来理解: dB + c + /Hz。

- **dBc** 中的 **c** 意为 relative to Carrier (相对于载波功率), 它不是一个绝对功率 (比如 dBm), 而是一个相对比例:

$$\text{单边带相位噪声 } \mathcal{L}(\Delta f) = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{偏离载波 } \Delta f \text{ 处, 1 Hz 带宽内的噪声功率 } P_{\text{noise}}}{\text{中心载波的总功率 } P_{\text{carrier}}} \right)$$

测量的是 "噪声功率是载波功率的几分之几"。

- **/Hz** 代表归一化到 1 Hz 带宽。频谱仪在测量噪声时测得的是某个测量带宽 (Resolution Bandwidth, RBW) 内的总功率, 为了公平比较不同芯片或系统, 必须把噪声功率除以测量带宽, 归一化到 1 Hz 宽度的基准上。

**为什么是负数 (-dB)?** 因为噪声功率远小于中心载波功率 ( $P_{\text{noise}} \ll P_{\text{carrier}}$ )。假设在偏离中心频率 10 kHz 处, 1 Hz 带宽内的噪声功率只有载波功率的一百万分之一 ( $10^{-6}$ ):

$$10 \log_{10}(10^{-6}) = -60 \text{ dBc/Hz}$$

由于噪声比载波小得多, 做对数运算后自然就得到了负数。某芯片在偏移 100 kHz 处的相位噪声为  $-120 \text{ dBc/Hz}$ , 含义是: 在距离中心频点 100 kHz 的位置, 取 1 Hz 带宽的微小频段, 里面的噪声功率比主载波信号功率低了 120 dB (即只有载波的万亿分之一)。负得越多 (绝对值越大), 说明噪声裙摆越低, 信号越纯净, 芯片的性能越好。

## 5.2.6 dB 到底是 $\times 10$ 还是 $\times 20$ ? 换算公式?

分贝 (dB) 本质上是对功率比例取对数, 你只需要看你拿来比较的物理量是功率还是幅度:

| 测量对象类型          | 代表物理量                      | 前面乘的系数 | 换算公式                                                          |
|-----------------|----------------------------|--------|---------------------------------------------------------------|
| 功率型 (Power)     | 能量、功率 ( $P$ )              | 10     | $\text{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right)$ |
| 幅度型 (Amplitude) | 电压 ( $V$ )、电流 ( $I$ )、光场幅度 | 20     | $\text{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{V}{V_0} \right)$ |

**为什么幅度型要乘 20?** 物理学中, 功率和电压/电流的平方成正比 ( $P = \frac{V^2}{R}$ )。把平方项放到对数公式里, 根据对数性质, 平方的指数 2 会直接提到前面去:

$$10 \cdot \log_{10} \left( \frac{V^2}{V_0^2} \right) = 10 \cdot 2 \cdot \log_{10} \left( \frac{V}{V_0} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{V}{V_0} \right)$$

**秒记口诀:** 功率自带能量乘 10, 幅度自带平方乘 20。

**幅度/电压型 (20 lg) 速算:** 幅度型 20 dB 怎么算呢?  $10^{(\text{dB数}/20)}$  倍数换算公式, 发现就是 10 倍。6 dB 呢? 10 的  $3/10$  次方 = 1.995, 约等于 2, 就是 2 倍。在 dB 上的 + 或 - 映射的是倍数关系: +6 dB = 翻两倍, +20 dB = 翻 10 倍。

## 5.2.7 SFDR 是什么？

SFDR (Spurious-Free Dynamic Range, 无杂散动态范围) 是数据转换器 (ADC/DAC) 核心指标之一, 衡量的是在频谱图中, 最高的目标信号功率与最高的干扰杂散 (Spur) 功率之间的相对比值。

它的计算公式分为两种形式:

- ① 用绝对功率 (dBm) 或幅度 (dBFS) 直接相减 (工程中最常用):

$$\text{SFDR (dB)} = P_{\text{signal}} - P_{\text{spur}}$$

$P_{\text{signal}}$ : 目标信号 (基波) 的功率 (单位: dBm 或 dBFS);  $P_{\text{spur}}$ : 在全频带内最大的那根杂散/谐波的功率 (单位: dBm 或 dBFS)。

- ② 用线性功率的比值计算 (标准对数公式):

$$\text{SFDR (dB)} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{signal, linear}}}{P_{\text{spur, linear}}} \right)$$

如果使用的是电压/幅度值 ( $V$ ), 由于幅度自带平方, 系数则乘 20:

$$\text{SFDR (dB)} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_{\text{signal}}}{V_{\text{spur}}} \right)$$

**为什么 SFDR 是正确的?** 因为分子是你想要的主信号功率 (通常很强), 分母是伴随出现的最大杂散/谐波功率 (通常很弱), 信号能量远远大于杂散能量。比如主信号功率  $P_{\text{signal}} = -5 \text{ dBm}$ , 最大杂散功率  $P_{\text{spur}} = -85 \text{ dBm}$ , 则:

$$\text{SFDR} = (-5 \text{ dBm}) - (-85 \text{ dBm}) = +80 \text{ dB}$$

SFDR 数值越大越好 (正得越多越好)。80 dB 的 SFDR 说明杂散只有主信号的百万分之一 ( $10^{-8}$ ), 意味着芯片输出的信号非常干净、干扰极小。

## 5.2.8 通道内初始相位差是什么？

在多通道波形芯片、模数转换系统 (多路 ADC/DAC) 或 MIMO 无线通信系统中, 通道内初始相位差 (In-channel / Inter-channel Initial Phase Difference) 是一个非常关键的物理参数, 它是指: 当多个通道同时接收或发射同一个频率的理想信号时, 在没有任何外部延时补偿的 "初始状态" 下, 各个通道之间信号相位的固有不一致量。

**为什么会有 "初始相位差"?** 理想状态下, 如果你给芯片的通道 A 和通道 B 输入完全相同的正弦波信号, 两路输出的波形应该完全重合 (相位差为  $0^\circ$ )。但在实际硬件设计和芯片内部, 信号经过的物理路径不可能绝对对称, 比如芯片内部电路微小差异或芯片外部 PCB 板布线走线不等长等等, 就会出现每个通道相位不等的情况。

在单通道系统中, 初始相位影响不大; 但在多通道协同工作的场景下, 初始相位差是致命的。多路 ADC/DAC 同步采样会导致不同通道采集到的数据在时间轴上 "对不上", 破坏空间复用或波形合成, 最终导致采样不同步。

## 5.2.9 DAC 的位数为啥有小数? 还有什么有效位是怎么算的?

DAC (数模转换器) 的 "位数" 出现小数, 通常是指 ENOB (Effective Number of Bits, 有效位数)。我们在芯片规格书上看到的 "16-bit DAC", 指的是它的标称物理位数 (Architecture Bits), 代表硬件上有 16 位的数字寄存器, 理论上能输出  $2^{16} = 65,536$  个不同的电压等级。但在实际工作中, 由于芯片内部存在噪声、失真、非线性等缺陷, 一个 16 位的 DAC 实际输出的信号质量, 可能只相当于一个 "完美无噪声的 14.3 位 DAC", 这个 14.3 就是它的有效位数 (ENOB)。

**为啥位数会算出小数?** 因为 ENOB 不是通过数硬件电路结构 (比如数有几个电阻或开关) 数出来的, 而是通过测量信号的质量 (信噪比), 用数学公式倒推计算出来的。

计算 ENOB 的核心逻辑是: 把你测得的 "实际动态性能" 对比 "理想 DAC 的理论极限"。

- **第一步：理解理想 DAC 的理论信噪比 (SNR)。** 对于一个完美的  $N$  位理想 DAC/ADC，只考虑它固有的量化噪声时，其理论极限信噪比公式为：

$$\text{SNR}_{\text{ideal}} = 6.02 \times N + 1.76 \text{ (dB)}$$

6.02 的来源： $20 \log_{10}(2) \approx 6.02$ ，意味着每增加 1 位 (bit) 分辨率，信号质量提升约 6 dB (幅度翻倍)；1.76 的来源：正弦波信号功率与理想均匀量化噪声功率的比值推导出的常数项。

- **第二步：测量实际 DAC 的 SINAD (信纳比)。** 在实验室中，给待测 DAC 输入一个满量程的正弦波，用高精度频谱仪测量其输出，测出 SINAD (Signal-to-Noise-and-Distortion Ratio, 信号与噪声及失真比)。SINAD 不仅包含了热噪声，还把芯片产生的谐波失真 (THD)、杂散 (SFDR) 全算进去了，反映了真正的综合信号质量。
- **第三步：倒推算出 ENOB。** 把第一步的理论公式反过来，用实际测得的 SINAD 替换理想的  $\text{SNR}_{\text{ideal}}$ ：

$$\text{SINAD} = 6.02 \times \text{ENOB} + 1.76$$

解方程导出 ENOB 计算公式：

$$\text{ENOB} = \frac{\text{SINAD (dB)} - 1.76}{6.02}$$

ENOB 越高越好 (越接近物理标称位数，说明芯片做工越好、底噪和失真越小)。通常高频/高速 DAC 的 ENOB 缩水比较明显 (比如 16-bit 10GSPS DAC 的 ENOB 可能只有 10~11 位)；而低速高精度 DAC 的 ENOB 会非常接近标称位数。

### 5.2.10 1/f 噪声是怎么衡量？为什么用 $T_{\varphi 2}$ 衡量？

1/f 噪声 (又称闪烁噪声/粉红噪声, Flicker Noise) 是一种功率谱密度 (PSD) 与频率  $f$  成反比的低频噪声：

$$S(f) = \frac{A}{|f|^\alpha} \quad (\alpha \approx 1)$$

对于量子测控芯片来说：低频 1/f 噪声会导致量子比特的能级结构 (0 和 1 之间的频率差  $\omega_{01}$ ) 发生随机漂移，导致量子相干性丢失。因此，量子领域是用时间尺度 (微秒  $\mu\text{s}$  或毫秒  $\text{ms}$ ) 来间接衡量 1/f 噪声强度的——去相干时间越短，说明 1/f 噪声越严重。

在量子比特或精密磁共振中，总的去相干时间称为  $T_2$  (Ramsey 测量得到的时间)，它由两部分共同决定：

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_\phi}$$

- $T_1$  (能量弛豫时间)：量子比特从高能级  $|1\rangle$  跌落回低能级  $|0\rangle$  的时间 (类似于功率衰减)；
- $T_\phi$  或  $T_{\varphi 2}$  (纯去相干时间 / Pure Dephasing Time)：这就是用来专门衡量 1/f 噪声的核心指标！它只关注相位漂移，不涉及能量丢失。在物理上， $T_{\varphi 2}$  与 1/f 噪声强度之间存在直接的数学映射。